UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
Ústav aplikované fyziky a matematiky

MOMENTY SETRVAČNOSTI
geometricky pravidelných homogenních těles

RNDr. Jan Z a j í c , CSc.

Pardubice 2010

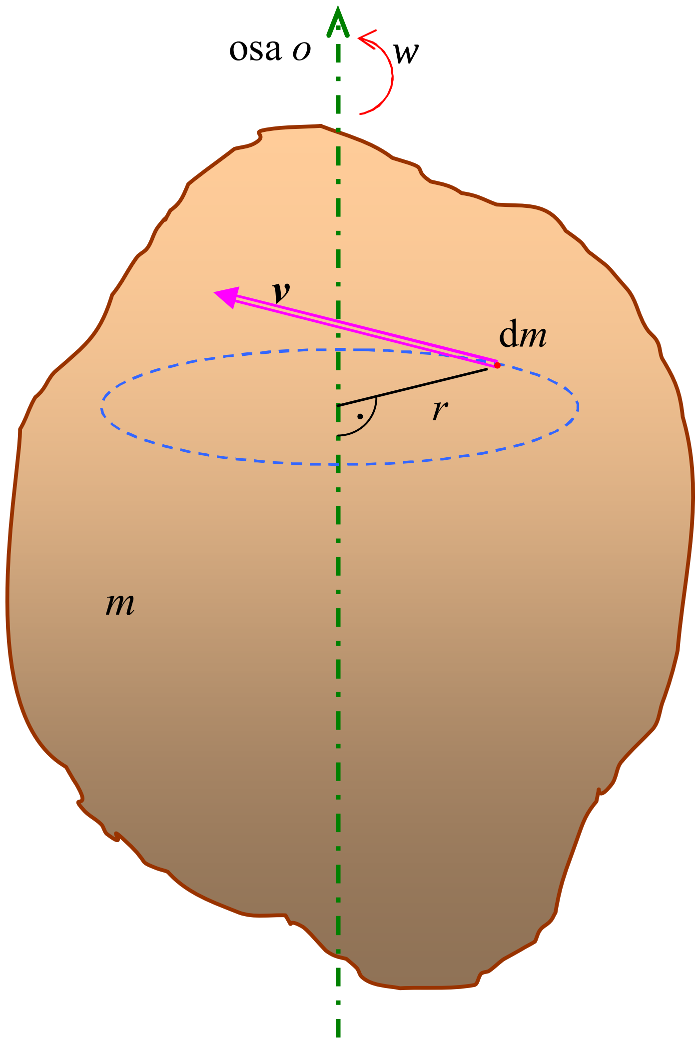
O b s a h :

*   *   *

Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané rotační ose

Fyzikální veličina moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k dané ose charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa kolem příslušné osy otáčení. Zjednodušeně lze říci, že u rotačních pohybů tělesa „hraje stejnou roli“ jako samotná hmotnost m u pohybů posuvných.

Základní vztah pro tuto veličinu získáme např. při odvozování vzorce pro kinetickou energii E_k rotujícího tělesa – viz následující obrázek.



Kinetickou energii E_k tuhého rotujícího tělesa určíme následujícím postupem.

Celé otáčející se tuhé těleso o hmotnosti m si rozdělíme („rozkouskujeme“) na nekonečně mnoho nekonečně malých elementů hmotnosti dm (fakticky na jednotlivé hmotné body). Pro každý takový element hmotnosti platí, že jeho pohybová energie

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2} v^2 \, \mathrm{d}m \qquad ,$$

kde v je velikost jeho okamžité rychlosti. Tuto rychlost ale mají různé body v tělese různě velkou, podle toho, jak daleko jsou od rotační osy. Všechny body v tělese ale mají v daném okamžiku navlas **stejnou úhlovou rychlost** w.

Jelikož nutně platí

$$v = r \,.\, w \quad ,$$

kde r je kolmá vzdálenost hmotného elementu od rotační osy (současně to je i poloměr kružnice, po níž se tento element dm pohybuje), lze psát

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} v^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{2} r^2 w^2 \,\mathrm{d}m \quad .$$

Pohybovou energii celého tělesa pak získáme nekonečným součtem (formálně integrací) všech těchto nekonečně malých kinetických energií dE_k přes celou hmotnost tělesa m, tedy

$$E_\mathrm{k} = \int_{(m)} \mathrm{d}E_\mathrm{k} = \int_{(m)} \frac{1}{2} r^2 w^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2} w^2 \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m \quad .$$

A právě integrál

$$\int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

v posledním vztahu – veličina vyjadřující, jak je hmotnost tuhého tělesa rozložena kolem příslušné osy otáčení – je **moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané rotační ose**. Tato fyzikální veličina je typickým skalárem, označujeme ji písmenem J, a jak už bylo řečeno v úvodu, pro tuhé těleso znamená při rotaci vlastně totéž, co hmotnost při pohybech posuvných. Jak je vcelku na první pohled patrné, její fyzikální jednotkou je $\mathrm{kg.m^2}$.

Platí tedy

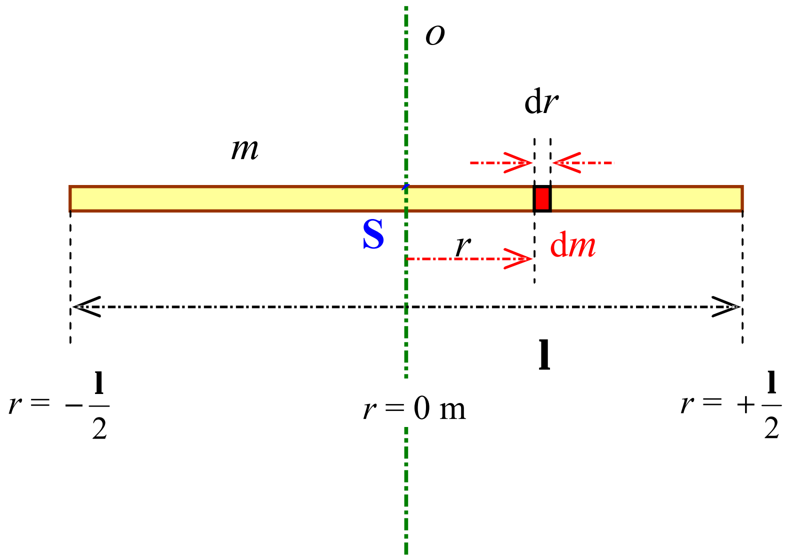
$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m} \quad .$$

V obecném případě je výpočet momentu setrvačnosti J poměrně náročnou matematickou úlohou vyžadující dokonalou znalost diferenciálního a integrálního počtu. Relativně jednodušší bývá takový výpočet v případě homogenních tuhých těles navíc vykazujících jistou míru geometrické symetrie, když určujeme jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hmotným středem (těžištěm) příslušného tělesa.

Některé z postupů si nyní sami provedeme na následujících stránkách.

Moment setrvačnosti homogenní tyče

a) vzhledem k ose procházející kolmo tyčí jejím hmotným středem



$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

Pro element hmotnosti dm musí platit jednoduchá úměra

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}r}{l} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{l}\,\mathrm{d}r \quad .$$

Dostáváme tedy, že

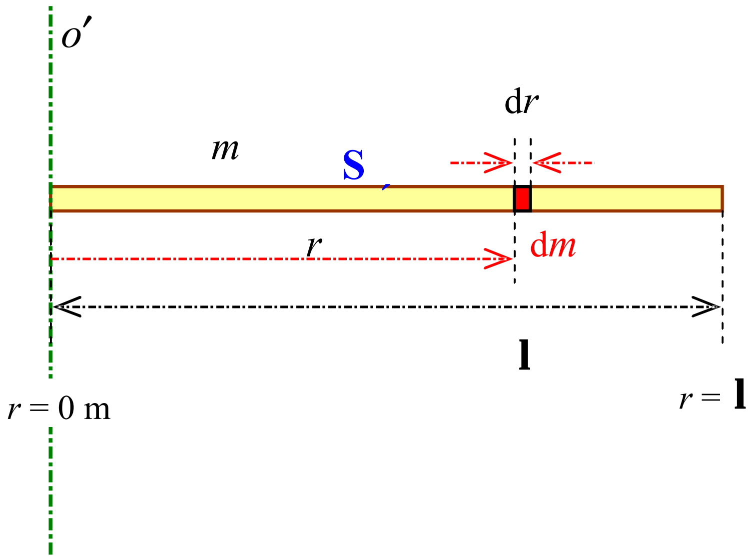
$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = \int_{(m)} r^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}r = \frac{m}{l} \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}r \;,$$

přičemž integrovat „přes celou hmotnost tyče“ znamená v našem případě měnit proměnnou r v rozmezí od $-\frac{l}{2}$ do $+\frac{l}{2}$. Tím pádem

$$J = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 \mathrm{d}r = \frac{m}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} \left(\frac{l^3}{8} - \frac{-l^3}{8} \right) = \frac{1}{3} \frac{m}{l} \frac{l^3}{4} \;,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{12} m\, l^2} \quad .$$

b) vzhledem k ose procházející kolmo tyčí jejím krajním bodem



Postup výpočtu je úplně stejný, jediné, co se změní, jsou integrační meze – proměnná vzdálenost r se tentokráte bude měnit v rozmezí od nuly do $\mathbf{l}$. Dostáváme tak

$$J' = \frac{m}{\mathbf{l}} \int_0^{\mathbf{l}} r^2 \mathrm{d}r = \frac{m}{\mathbf{l}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\mathbf{l}} = \frac{m}{\mathbf{l}} \frac{\mathbf{l}^3}{3} ,$$

$$\boxed{J' = \frac{1}{3} m \mathbf{l}^2} .$$

Pozn.: Na příkladu homogenní tyče si lze taky snadno ověřit platnost Steinerovy věty. Mezi oběma hodnotami momentů setrvačnosti je rozdíl

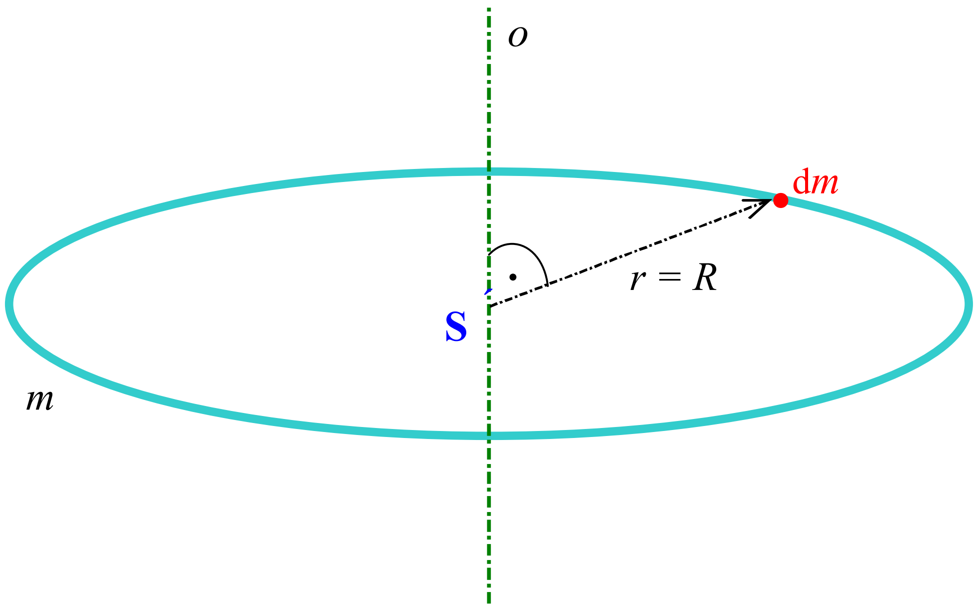
$$J' - J = \frac{1}{3} m \mathbf{l}^2 - \frac{1}{12} m \mathbf{l}^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) m \mathbf{l}^2 = \frac{1}{4} m \mathbf{l}^2 = m \left(\frac{\mathbf{l}}{2} \right)^2 .$$

A právě vzdálenost obou os $d = \dfrac{\mathbf{l}}{2}$, takže skutečně platí

$$\boxed{J' = J + m d^2} .$$

Moment setrvačnosti prstence

a) vzhledem k ose procházející jeho středem kolmo na rovinu prstence



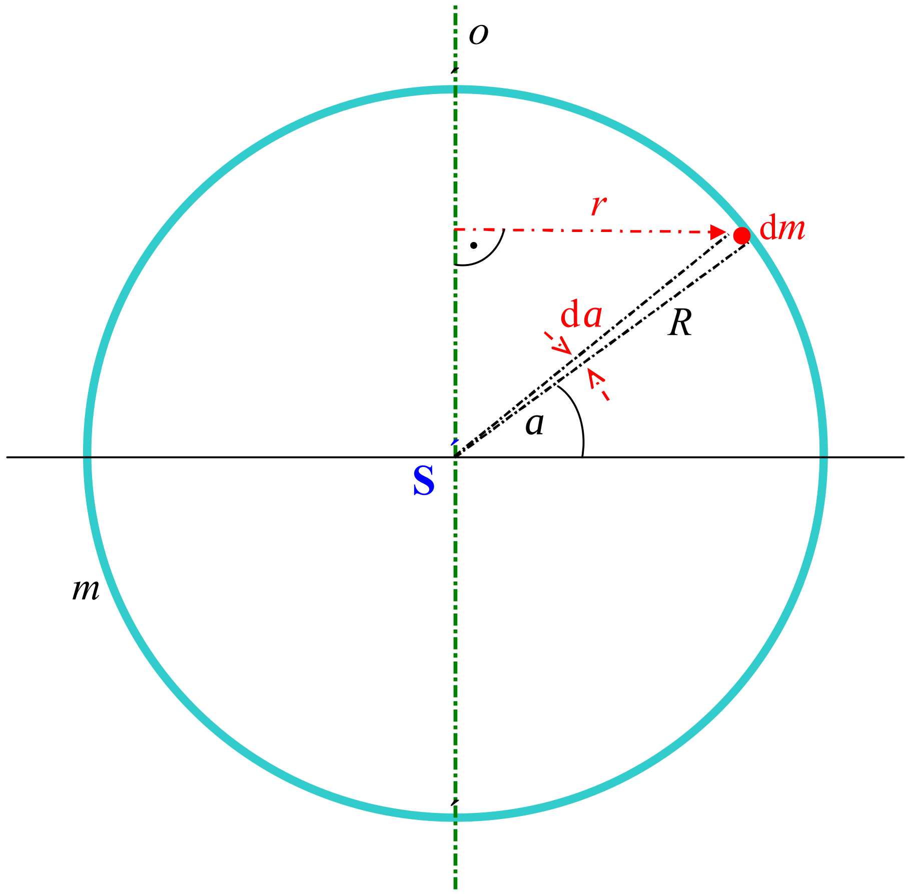
V tomto případě je výpočet momentu setrvačnosti naprosto triviální, neboť jakýkoli element hmotnosti dm má od rotační osy naprosto stejnou vzdálenost r, jež je rovna poloměru R prstence. Okamžitě tak dostáváme

$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = \int_{(m)} R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int_{(m)} \mathrm{d}m \quad .$$

Přitom integrál $\int_{(m)} \mathrm{d}m$ nepředstavuje nic jiného než celkovou hmotnost m našeho prstence. Tedy

$$\boxed{J = m R^2} \quad .$$

b) vzhledem k ose ležící v rovině prstence a procházející jeho středem



Nyní už nebude vzdálenost r elementu hmotnosti dm od osy otáčení o konstantní. Tuto vzdálenost lze ale jednoduše vyjádřit jako

$$r = R \,.\, \cos a \quad ,$$

kde R je poloměr prstence.

Pro element hmotnosti dm pak musí platit úměra

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}a}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{2\pi}\,\mathrm{d}a \quad .$$

Integrovat „přes celou hmotnost prstence“ znamená měnit úhel a od nuly do 2π. Hledaný moment setrvačnosti

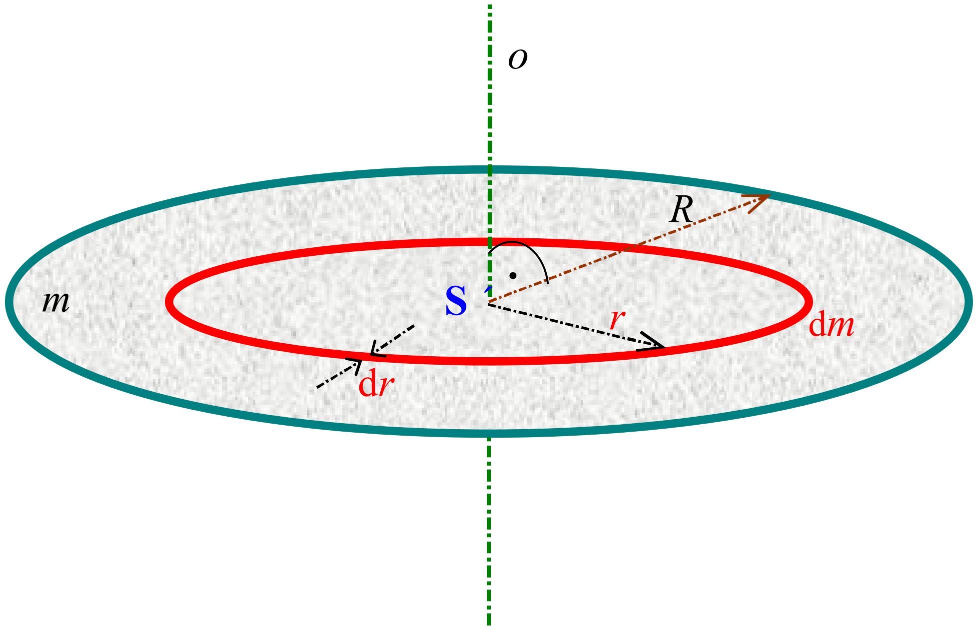
$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = \int_{a=0}^{2p} R^2 \cdot \cos^2 a \cdot \frac{m}{2\pi}\,\mathrm{d}a = \frac{mR^2}{2\pi} \int_{a=0}^{2p} \cos^2 a \,\mathrm{d}a = \frac{mR^2}{2\pi} \int_{a=0}^{2p} \frac{1+\cos 2a}{2}\,\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{mR^2}{4\pi} \int_{a=0}^{2p} (1+\cos 2a)\,\mathrm{d}a = \frac{mR^2}{4\pi} \left[a + \frac{1}{2}\sin 2a \right]_{a=0}^{2p} = \frac{mR^2}{4\pi}\,(2\pi - 0 + 0 - 0) \ ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2} \quad .$$

Moment setrvačnosti kruhové desky

a) vzhledem k ose procházející jejím středem kolmo k rovině desky



$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

Za element hmotnosti dm si zvolíme nekonečně tenké mezikruží o poloměru r a „tloušťce“ dr. Pro tuto infinitezimální hmotnost opět platí jednoduchá úměra

$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}S}{S}$, přičemž plochu dS mezikruží lze vyjádřit jako $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{2\pi r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = 2\frac{m}{R^2} r\,\mathrm{d}r \quad .$$

Moment setrvačnosti kruhové desky

$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = \int_{(m)} r^2\, 2\frac{m}{R^2} r\,\mathrm{d}r = 2\frac{m}{R^2} \int_{(m)} r^3 \mathrm{d}r \quad ,$$

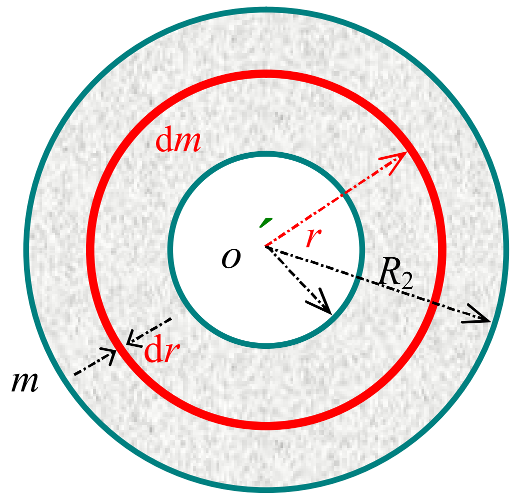
přičemž integrovat „přes celou hmotnost desky“ znamená v tomto případě měnit proměnnou r (poloměr mezikruží) v rozmezí od nuly do R . Tak dostaneme

$$J = 2\frac{m}{R^2} \int_{(m)} r^3 \mathrm{d}r = 2\frac{m}{R^2} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\frac{m}{R^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\frac{m}{R^2}\frac{R^4}{4} \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2} \quad .$$

Pozn.: **a)** Výsledek, jenž jsme právě získali pro plnou kruhovou desku, platí i pro případ plného homogenního válce jakékoli výšky *v*, jestliže rotační osa *o* prochází středy obou jeho podstav.

b) Uvedený postup lze použít i při výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky ve tvaru mezikruží (s vyříznutým středem), resp. dutého (tlustostěnného) válce, jehož vnitřní poloměr je R_1 a vnější poloměr R_2 .



Za element hmotnosti dm si zvolíme znovu nekonečně tenké mezikruží o poloměru $R_1 < r < R_2$ a „tloušťce“ dr. Opět vyjdeme z prosté úměry

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}S}{S} \quad , \text{ v níž je plocha celé desky } S = \pi\,(R_2^2 - R_1^2) \text{ . Tak dostaneme}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{2\pi r\,\mathrm{d}r}{\pi\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = 2\frac{m}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} r\,\mathrm{d}r \quad .$$

Při výpočtu momentu setrvačnosti

$$J = \int\limits_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

nyní postupujeme při integraci s proměnnou r od vnitřního poloměru R_1 do vnějšího poloměru R_2

$$J = 2\frac{m}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \int\limits_{(m)} r^3 \mathrm{d}r = 2\frac{m}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^3 \mathrm{d}r = 2\frac{m}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$2\frac{m}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \frac{R_2^{\,4} - R_1^{\,4}}{4} = \frac{1}{2} m \frac{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)\cdot\left(R_2^{\,2} + R_1^{\,2}\right)}{\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)} \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\, m\,(R_2^2 + R_1^2)} \quad .$$

K tomuto vztahu se ale můžeme dostat také druhým postupem nevyžadujícím integraci. Moment setrvačnosti desky ve tvaru mezikruží získáme také tak, že od momentu setrvačnosti J_2 plného kotouče o poloměru R_2 odečteme moment setrvačnosti J_1 plného kotouče o poloměru R_1 .

Musí platit

$$J = J_2 - J_1 = \frac{1}{2}\, m_2 R_2^2 - \frac{1}{2}\, m_1 R_1^2 \quad ,$$

kde m_2 a m_1 jsou hmotnosti plného kotouče o poloměru R_2 a plného kotouče o poloměru R_1, který z desky vyřízneme. Hmotnost mezikruží tak bude

$$m = m_2 - m_1$$

a navíc musí pro hmotnosti m_2 a m_1 platit

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad m_2 R_1^2 = m_1 R_2^2 \quad .$$

Takže

$$J = \frac{1}{2}\left(m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2\right) = \frac{1}{2}\left[(m + m_1) R_2^2 - m_1 R_1^2\right] = \frac{1}{2}\left(m R_2^2 + m_1 R_2^2 - m_1 R_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m R_2^2 + m_2 R_1^2 - m_1 R_1^2\right) = \frac{1}{2}\left[\, m R_2^2 + \underbrace{(m_2 - m_1)}_{m} R_1^2 \,\right] \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\, m \left(R_2^2 + R_1^2\right)} \quad .$$

Pozn.: **1)** Jak už bylo zmíněno, opět lze tento výsledek použít i pro určení momentu setrvačnosti homogenního tlustostěnného válce bez ohledu na jeho výšku *v*, pouze musí být splněna podmínka, že rotační osa *o* prochází středy obou jeho podstav.

2) Výsledek získaný pro desku ve tvaru mezikruží (resp. tlustostěnný válec) je možné aplikovat i na plnou desku (resp. plný válec), neboť v takovém případě nutně platí

$$R_1 = 0\ \mathrm{m} \quad \& \quad R_1 = R \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2}\, m R^2 \quad ;$$

použít jej můžeme ale i pro prstenec nebo tenkostěnný válec, tady zase

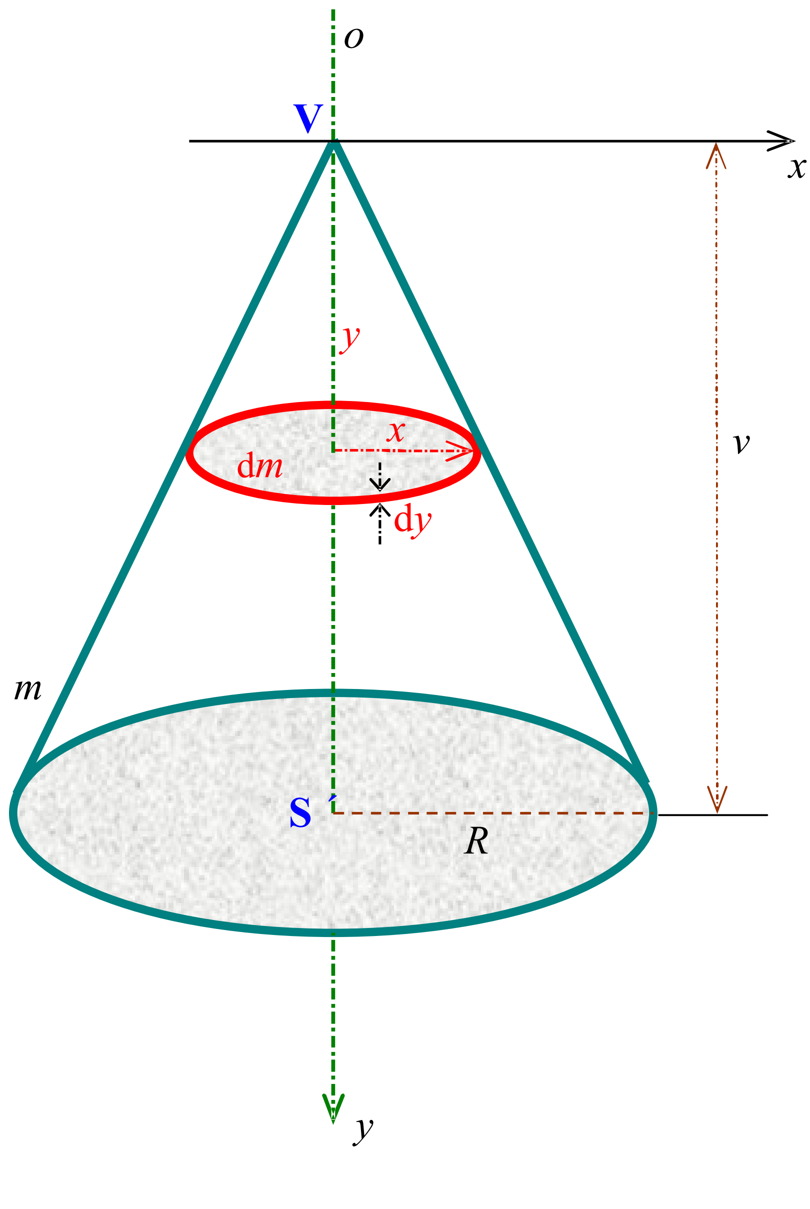
$$R_1 \doteq R_2 = R \quad \Rightarrow \quad J = m R^2 \quad .$$

* * *

Výsledky získané pro homogenní tyč a pro homogenní kruhovou desku lze dále využít při odvozování momentů setrvačnosti homogenních těles vykazujících jistý stupeň symetrie. Zejména u rotačních těles lze aplikovat tzv. „salámovou metodu“, kdy je těleso rozkouskováno na jednotlivé kruhové destičky nekonečně malé hmotnosti dm kolmé k rotační ose. Tento postup uplatníme následně u kužele, koule a rotačního elipsoidu. U rovinných útvarů, u kvádru a krychle se zase budeme odvolávat na vztah odvozený pro homogenní tyč.

Moment setrvačnosti rotačního kužele

vzhledem k jeho geometrické ose procházející středem podstavy a vrcholem kužele



Pro snazší orientaci v dalším postupu si zavedu souřadnou soustavu x, y s počátkem ve vrcholu kužele – orientace os je patrná z obrázku, navíc osa y splývá s rotační osou.

Kužel „rozkrájíme“ na nekonečně tenké kruhové destičky rovnoběžné s podstavou a kolmé k rotační ose. Jejich poloměr bude obecně x a jejich nekonečně malá tloušťka dy zaručí, je mají nekonečně malou hmotnost dm. Formálně lze moment setrvačnosti takové destičky vyjádřit jako

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}m \quad .$$

Moment setrvačnosti J celého kužele pak bude dán nekonečným součtem (tedy integrací) těchto jednotlivých nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ přes celou výšku v kužele.

Zbývá tedy vystihnout jak „velká“ je hmotnost každého elementu dm, a také se budeme muset vypořádat s rozdílným poloměrem x jednotlivých destiček.

Při určení hmotnosti dm se opět navrátíme k již zde několikrát uplatněné úměře. U kužele bude platit

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\pi x^2\,\mathrm{d}y}{\frac{1}{3}\pi R^2 v} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}m = 3m\,\frac{x^2}{R^2 v}\,\mathrm{d}y \quad .$$

A stejný postup použijeme i pro nahrazení proměnné x proměnnou y. Evidentně platí

$$\frac{x}{y} = \frac{R}{v} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{R}{v}\,y \quad .$$

Postupně dosadíme do

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\,x^2 .\, 3m\,\frac{x^2}{R^2 v}\,\mathrm{d}y = \frac{3m}{2}\cdot\frac{x^4}{R^2 v}\,\mathrm{d}y = \frac{3m}{2}\cdot\frac{\frac{R^4}{v^4}\,y^4}{R^2 v}\,\mathrm{d}y = \frac{3mR^2}{2v^5}\,y^4\,\mathrm{d}y \quad .$$

A teď už zbývá učinit poslední krok. Jak již bylo řečeno výše, moment setrvačnosti J celého kužele spočítáme integrací všech nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ nekonečně tenkých kruhových destiček přes celou výšku v kužele (od vrcholu, kde $y = 0$, až k podstavě, kde $y = v$).

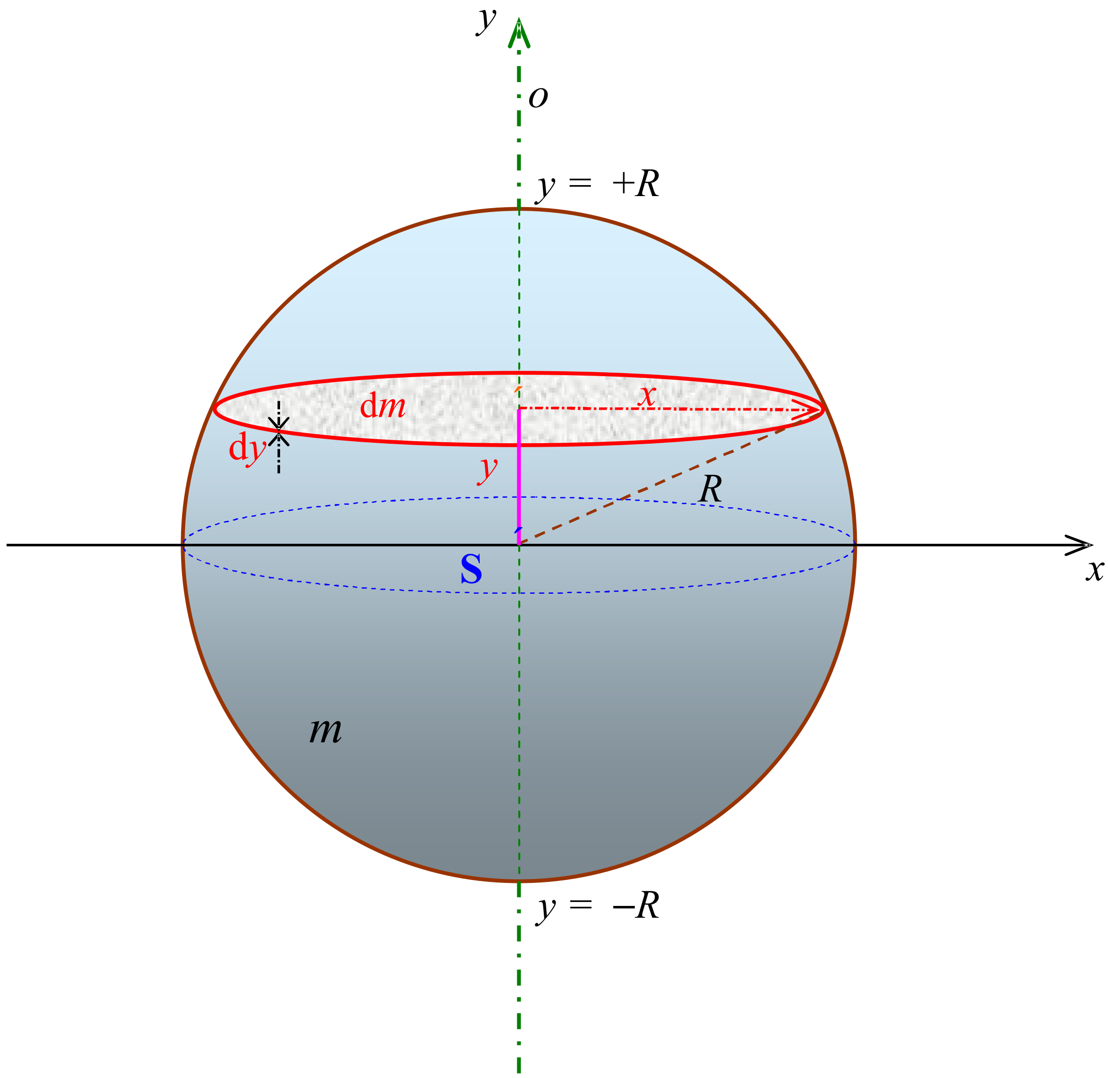
$$J = \int_{y=0}^{v}\mathrm{d}J = \int_{y=0}^{v}\frac{3mR^2}{2v^5}\,y^4\,\mathrm{d}y = \frac{3mR^2}{2v^5}\int_{y=0}^{v}y^4\,\mathrm{d}y = \frac{3mR^2}{2v^5}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^v = \frac{3mR^2}{2v^5}\cdot\frac{v^5}{5} \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{3}{10}\,m\,R^2} \quad .$$

Pozn.: Povšimněte si, že ve výsledném vztahu vůbec nevystupuje (podobně jako u válce) výška v kužele. Homogenní kužele mající stejný poloměr podstavy i stejnou hmotnost tak budou mít bez ohledu na to, jakou mají výšku, stejný moment setrvačnosti.

Moment setrvačnosti koule

vzhledem k ose procházející jejím středem



Postupovat budeme stejně jako u kužele. Opět si zavedeme souřadnou soustavu x, y s počátkem tentokráte ve středu koule, přičemž rotační osa bude totožná s osou y.

Kouli si opět „rozkrájíme" na nekonečně tenké kruhové destičky kolmé k rotační ose. I v tomto případě bude jejich poloměr obecně x a opět budou mít nekonečně malou tloušťku dy, jež zaručí, že budou mít i nekonečně malou hmotnost dm.

Znovu tak lze moment setrvačnosti každé takové kruhové destičky formálně vyjádřit jako

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}m$$

a moment setrvačnosti J celé koule pak následně spočítat integrací těchto jednotlivých nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ přes celý průměr koule, tj. obrazně řečeno od jejího „jižního pólu" k „pólu severnímu".

Nyní určíme, jak „velká“ je hmotnost každého elementu dm. Úměrou tentokráte dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\pi x^2\,\mathrm{d}y}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}m = \frac{3}{4}m\frac{x^2}{R^3}\mathrm{d}y \quad .$$

Vztah mezi proměnnými x a y je dán jednoznačně Pythagorovou větou

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad .$$

A tak opět postupně dosazujeme do

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\left(R^2 - y^2\right)\cdot\frac{3}{4}m\frac{R^2 - y^2}{R^3}\mathrm{d}y = \frac{3}{8}m\frac{\left(R^2 - y^2\right)^2}{R^3}\mathrm{d}y \quad .$$

Poslední krokem, jenž zbývá učinit, je integrace všech těchto nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ přes celý průměr koule ve směru rotační osy, tedy od $y = -R$ až po $y = +R$. Jelikož ale budeme integrovat sudou funkci, stačí provést integraci pouze od nuly do R a výsledek vynásobit dvěma. Platí

$$J = \int_{y=-R}^{+R}\mathrm{d}J = 2\int_{y=0}^{R}\mathrm{d}J = 2\int_{y=0}^{R}\frac{3m\left(R^2 - y^2\right)^2}{8R^3}\mathrm{d}y = \frac{6m}{8R^3}\int_{y=0}^{R}\left(R^4 - 2R^2y^2 + y^4\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{3m}{4R^3}\left[R^4y - \frac{2}{3}R^2y^2 + \frac{y^5}{5}\right]_0^R = \frac{3m}{4R^3}\cdot\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \frac{3m}{4R^3}\cdot\frac{8}{15}R^5 \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{2}{5}mR^2} \quad .$$

Pozn.: Podobný postup bychom uplatnili i při odvozování momentu setrvačnosti homogenního rotačního elipsoidu, ať už by byla rotační osa totožná s hlavní či vedlejší osou. Pouze se změní vzorec pro objem tohoto tělesa a vztah mezi proměnnými x a y. V případě, že rotační osa bude totožná s vedlejší osou (tak, jak je naznačeno i na obrázku na následující straně) platí

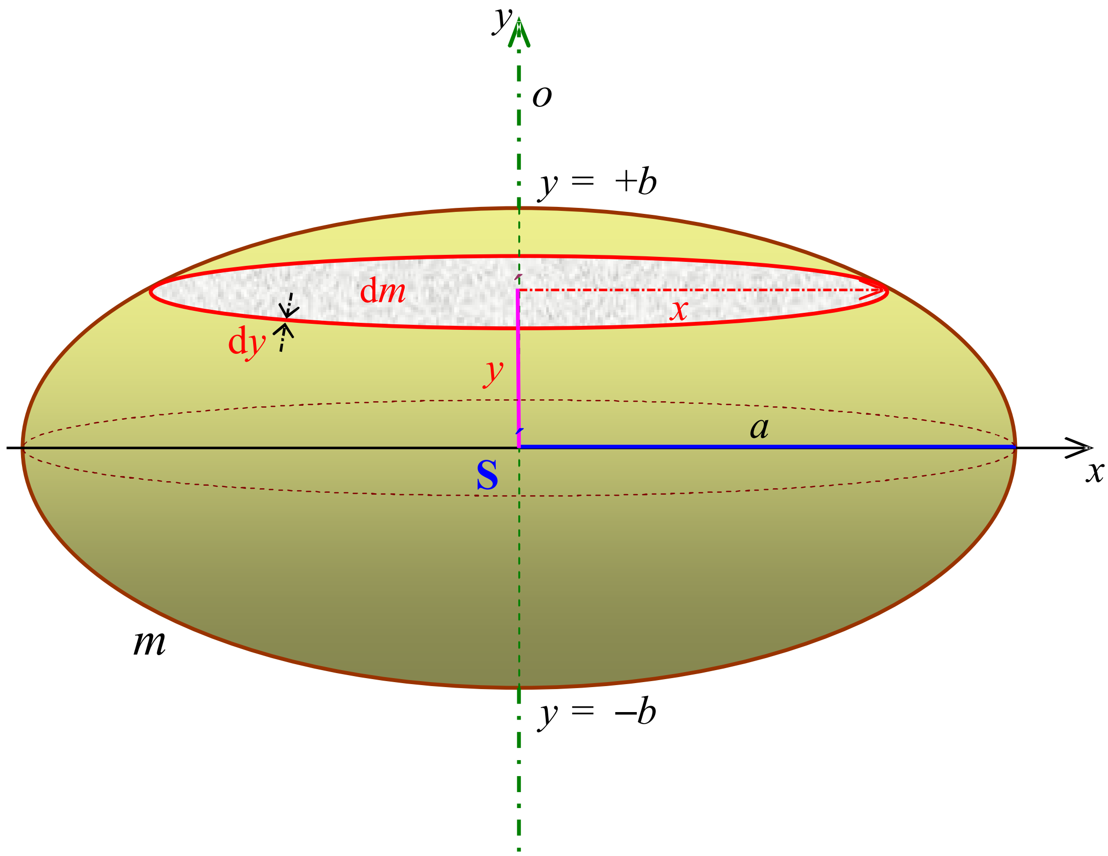
$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2 \quad .$$

Vztah mezi proměnnými x a y pak vyjadřuje středová rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad\Rightarrow\quad x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad .$$

Moment setrvačnosti rotačního elipsoidu

a) vzhledem k ose procházející jeho středem a totožné s vedlejší osou $2b$



Moment setrvačnosti kruhové destičky s nekonečně malou hmotností dm

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}m \quad ,$$

přičemž platí

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\pi x^2\,\mathrm{d}y}{\frac{4}{3}\pi a b^2} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{3}{4}m\,\frac{x^2}{ab^2}\mathrm{d}y \quad \& \quad x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \quad .$$

Tedy

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\,a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).\,\frac{3}{4}m\,\frac{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}{ab^2}\mathrm{d}y = \frac{3}{8}m\cdot\frac{a^3}{b^2}\cdot\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)^2\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{ma^3}{b^6}\cdot\left(b^4-2b^2y^2+y^4\right)\mathrm{d}y \quad .$$

Nyní už jen zbývá – stejně jako u koule – provést závěrečnou integraci všech nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ přes celou vedlejší osu. To tedy znamená postupovat od $y = -b$ až po $y = +b$. Opět se ale integrace týká sudé funkce, takže ji stačí provést pouze od nuly do b a příslušný výsledek vynásobit dvěma.

Dostáváme

$$J = \int_{y=-b}^{+b} \mathrm{d}J = 2\int_{y=0}^{b} \mathrm{d}J = \frac{6ma^3}{8b^6} \int_{y=0}^{b} \left(b^4 - 2b^2y^2 + y^4\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{3ma^3}{4b^6}\left[b^4y - \frac{2}{3}b^2y^2 + \frac{y^5}{5}\right]_0^b = \frac{3ma^3}{4b^6}\cdot\left(b^5 - \frac{2}{3}b^5 + \frac{1}{5}b^5\right) = \frac{3ma^2}{4b^6}\cdot\frac{8}{15}\cdot b^5 \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{2}{5}\, m\, \frac{a^3}{b}} \quad .$$

b) vzhledem k ose procházející jeho středem a totožné s hlavní osou 2a

Bez dalšího počítání (pouhým „prohozením“) proměnných y a x a integrací dJ v mezích

$$-a \le x \le +a$$

okamžitě dostaneme vztah

$$\boxed{J = \frac{2}{5}\, m\, \frac{b^3}{a}} \quad .$$

Pozn.: Oba dva vztahy platné pro moment setrvačnosti rotačního elipsoidu lze použít i pro kouli, u níž nutně platí

$$a = b = R \quad .$$

Pouhým dosazením tak hned získáme

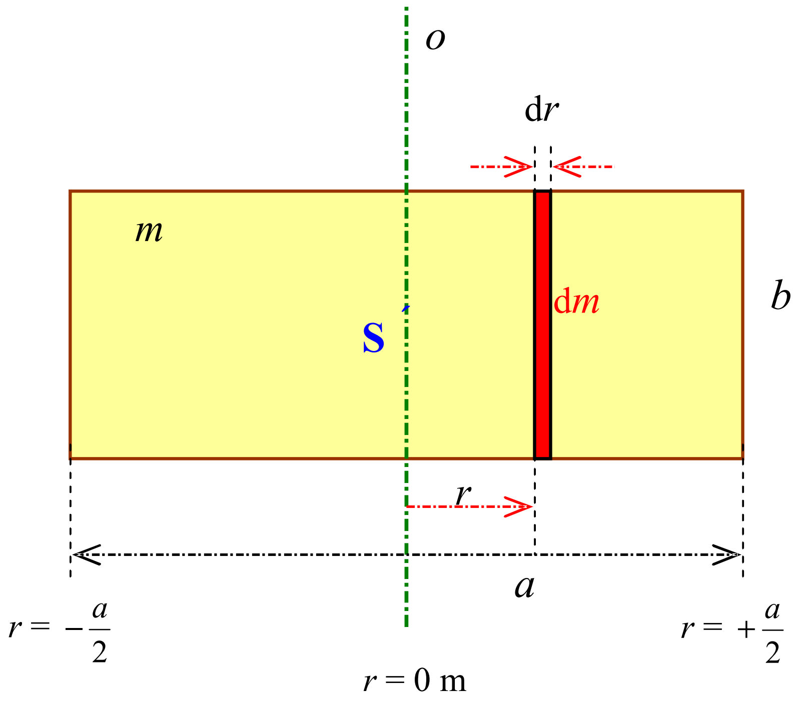
$$J = \frac{2}{5}\, m R^2 \quad .$$

Moment setrvačnosti obdélníkové desky

vzhledem k ose ležící v rovině desky a procházející jejím hmotným středem

U tohoto tělesa vlastně jen zopakujeme postup, který jsme provedli na hned začátku tohoto výkladu u homogenní tyče.

Mějme obdélníkovou desku o rozměrech a (délka) a b (šířka), osa o prochází středem desky a je rovnoběžná se stranou b.



Jako element hmotnosti dm si tentokráte zvolíme nekonečně tenký obdélník o rozměrech dr a b, přičemž právě jeho delší strana b je rovnoběžná s rotační osou. Pak už je další postup úplně stejný jako u homogenní tyče, pouze ve všech vztazích místo délky **l** vystupuje délka obdélníka a.

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}r}{a} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{a}\,\mathrm{d}r \quad .$$

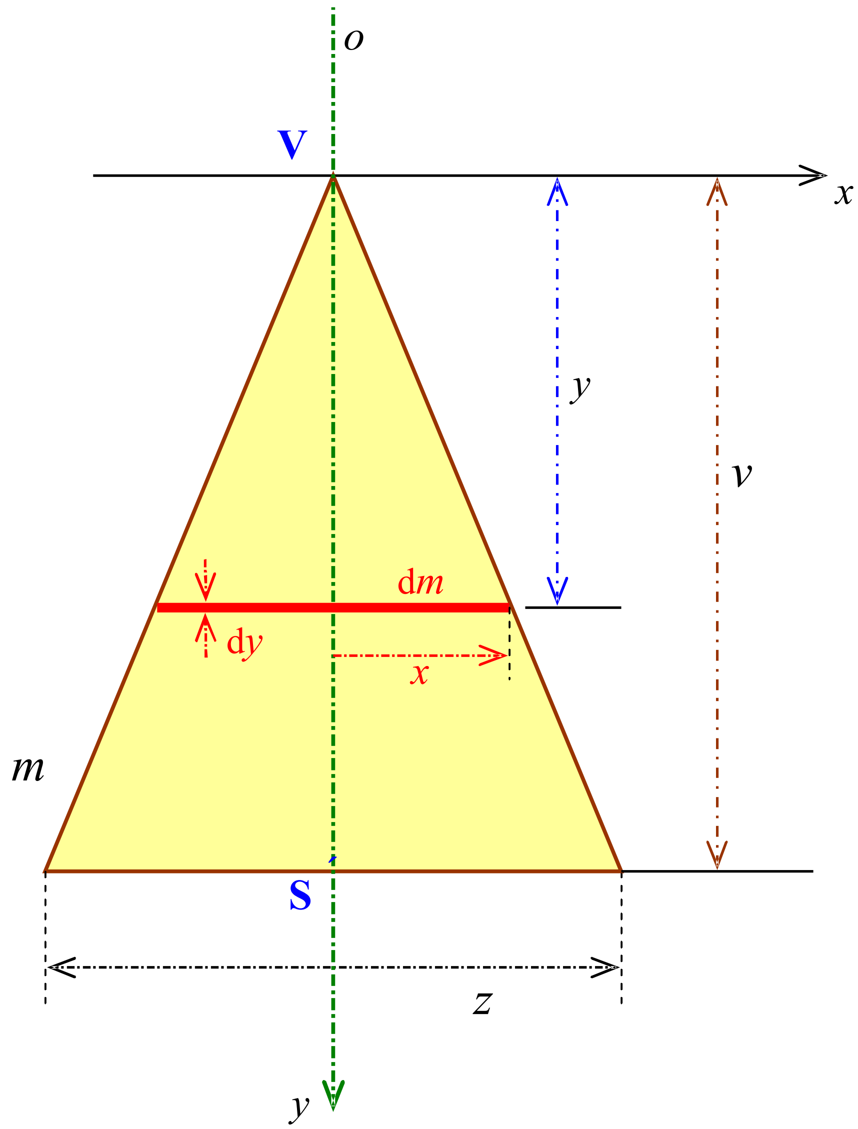
$$J = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} r^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} r^2 \mathrm{d}r = \frac{m}{a}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{3}\,\frac{m}{a}\left(\frac{a^3}{8} - \frac{-a^3}{8}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{m}{a}\,\frac{a^3}{4} \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{12}\,m\,a^2} \quad .$$

Jak je patrné, výsledek absolutně nezávisí na délce strany b, jež je s rotační osou rovnoběžná.

Moment setrvačnosti desky ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka

vzhledem k ose ležící v rovině desky a totožné s výškou k základně trojúhelníka



Rozměry trojúhelníkové desky označím z (délka základny) a v (výška trojúhelníka). Podobně jako u kužele si zavedu souřadnou soustavu x, y s počátkem ve vrcholu kužele, přičemž osa y bude splývat s rotační osou.

Trojúhelníkovou desku „rozkrájím“ na jednotlivé nekonečně tenké tyčky kolmé k ose. Jejich délka bude obecně $2x$, jejich nekonečně malá tloušťka $\mathrm{d}y$ a jejich hmotnost bude $\mathrm{d}m$. Pro moment setrvačnosti takové infinitezimální tyčky lze použít vztah

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{12}\,\mathrm{d}m\,(2x)^2 = \frac{1}{3}\,x^2\,\mathrm{d}m$$

a moment setrvačnosti J celé trojúhelníkové desky pak spočítám integrací těchto nekonečně malých momentů setrvačnosti $\mathrm{d}J$ přes celou výšku v trojúhelníka.

Pro nekonečně malou hmotnost dm musí tentokráte platit úměra

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{2x\,\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}z \cdot v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = 4m\,\frac{x}{z \cdot v}\,\mathrm{d}y \quad .$$

Podobně platí

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{z}{2}}{v} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{z}{2v}\,y \quad .$$

Nyní dosadím do výrazu pro

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{3}\,x^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{3}\,x^2 .\, 4m\,\frac{x}{z \cdot v}\,\mathrm{d}y = \frac{4m}{3} \cdot \frac{x^3}{z \cdot v}\,\mathrm{d}y = \frac{4m}{3} \cdot \frac{\frac{z^3}{8v^3}\,y^3}{z \cdot v}\,\mathrm{d}y = \frac{mz^2}{6v^4}\,y^3\,\mathrm{d}y \quad .$$

Závěrečnou integrací těchto nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ nekonečně tenkých tyček provedu přes celou výšku v kužele od vrcholu, kde $y = 0$, až k podstavě, kde $y = v$.

$$J = \int_{y=0}^{v} \mathrm{d}J = \int_{y=0}^{v} \frac{mz^2}{6v^4}\,y^3\,\mathrm{d}y = \frac{mz^2}{6v^4} \int_{y=0}^{v} y^3 \mathrm{d}y = \frac{mz^2}{6v^4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^v = \frac{mz^2}{6v^4} \cdot \frac{v^4}{4} \quad ,$$

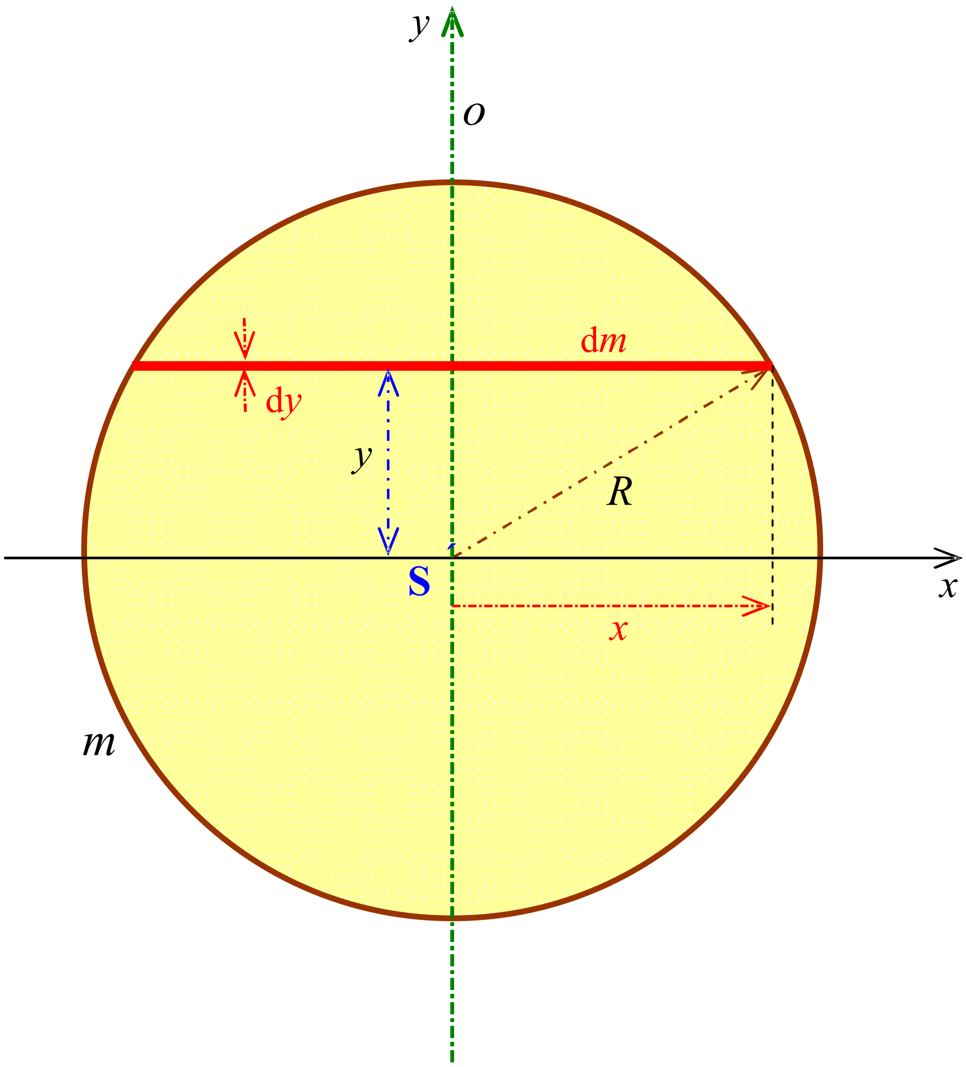
$$\boxed{J = \frac{1}{24}\,m\,z^2} \quad .$$

Pozn.: Výsledný vztah nakonec opět neobsahuje výšku v trojúhelníkové desky. Různé desky tvaru rovnoramenného trojúhelníka mající stejný rozměr základny z i stejnou hmotnost m tak budou mít bez ohledu na to, jakou mají výšku, stejný moment setrvačnosti vzhledem k ose totožné s výškou vedenou k základně trojúhelníka.

Moment setrvačnosti kruhové desky

b) vzhledem k ose ležící v rovině desky a procházející jejím středem

Vracíme se zde k tělesu, u nějž jsme už jednou moment setrvačnosti počítali. Tentokráte ale rotační osa bude ležet v rovině desky, takže půjde o výpočet momentu setrvačnosti rovinného obrazce, který si podobně jako u trojúhelníkové desky „rozkrájíme“ na jednotlivé nekonečně tenké tyčky kolmé k rotační ose.



Souřadná soustava x, y bude mít tentokrát počátek ve středu S kruhové desky, rotační osa o bude orientována svisle a bude totožná s osou y.

Jednotlivé infinitezimální tyčky kolmé k ose o mají nekonečně malou tloušťku dy a délku obecně $2x$ a samozřejmě nekonečně malou hmotnost dm. Pro moment setrvačnosti dJ takto zvolené tyčky lze opět použít vztah

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{12}\,\mathrm{d}m\,(2x)^2 = \frac{1}{3}\,x^2\,\mathrm{d}m \quad .$$

Moment setrvačnosti J celé kruhové desky pak spočítám integrací všech těchto nekonečně malých momentů setrvačnosti dJ přes celý průměr kruhu ve směru svislé osy y.

Nekonečně malou hmotnost dm si vyjádřím znovu na základě jednoduché úměry mezi plochami a hmotnostmi

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{2x\,\mathrm{d}y}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = 2m\,\frac{x}{\pi R^2}\mathrm{d}y \quad .$$

Opět zde máme dvě proměnné x a y, jelikož konečnou integraci budu provádět „přes y“, je třeba ještě vyjádřit x pomocí této druhé proměnné. A ať už využiji středovou rovnici kružnice nebo jednoduše Pythagorovou větou, dostávám

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad .$$

Teď již je vše připraveno k dosazení za

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{3}\,x^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{3}\left(R^2 - y^2\right).\,2m\,\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{\pi R^2}\cdot\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y \quad .$$

Zbývá už jen poslední, zato nejnáročnější úkol – provést integraci. Díky tomu, že se jedná znovu o sudou funkci, stačí opět integrovat všechny momenty setrvačnosti dJ pouze od středu kruhu ($y = 0$) k jeho okraji ($y = R$) a výsledek pak vynásobit dvěma. Počítám tak vlastně moment setrvačnosti „horního“ půlkruhu, moment setrvačnosti celé desky musí být logicky dvojnásobný.

Tedy

$$J = \int_{y=-R}^{+R}\mathrm{d}J = 2\int_{y=0}^{R}\mathrm{d}J = 2\int_{y=0}^{R}\frac{2}{3}\cdot\frac{m}{\pi R^2}\cdot\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{4m}{3\pi R^2}\int_{y=0}^{R}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y \quad . \qquad (*)$$

K výpočtu posledního integrálu je nutno použít substituční metodu. Položím

$$y = R\,.\,\sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = R\,.\,\cos t\;\mathrm{d}t \quad .$$

Pro integrační meze pak vychází

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad ;$$

$$y = R \quad \Rightarrow \quad \sin t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Po dosazení

$$\int_{y=0}^{R}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2 - R^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\;R\,.\,\cos t\;\mathrm{d}t = R^3\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\;R\,.\,\cos t\;\mathrm{d}t =$$

$$= R^4\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}.\,\cos t\;\mathrm{d}t = R^4\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,.\,\cos t\;\mathrm{d}t = R^4\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t \quad .$$

Pro výpočet integrálu čtvrté mocniny funkce cos t lze použít rekurentní vzorec odvozený na základě opakované aplikace metody „per partes“. Je-li

$$\mathrm{I_n} = \int \cos^{\mathrm{n}} t \; \mathrm{d}t \quad ,$$

pak

$$\mathrm{I_n} = \frac{1}{\mathrm{n}} \cos^{\mathrm{n-1}} t \sin t + \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{I_{n-2}} \quad .$$

Podle uvedeného vzorce musí tedy vyjít

$$R^4 \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t = R^4 \Big[\underbrace{\frac{1}{4} \cos^3 t \,.\, \sin t}_{=0\ !!!} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} R^4 \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} R^4 \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{8} R^4 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} R^4 \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi R^4 \quad .$$

Pozn.: Místo posledního výpočtu šlo také nahlédnout do tabulek integrálů – můžete se tam snadno přesvědčit, že uváděný výsledek poslední integrace je správný.

A právě tento výsledek $\left(\frac{3}{16} \pi R^4 \right)$ nyní dosadím do vztahu $(*)$.

Tak se konečně dostávám ke konečnému vzorci pro hledaný moment setrvačnosti kruhové desky vzhledem k ose ležící v rovině desky a procházející jejím středem

$$J = \frac{4m}{3\pi R^2} \int_{y=0}^{R} \left(R^2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}y = \frac{4m}{3\pi R^2} \cdot \frac{3}{16} \pi R^4 \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{4} m R^2} \quad .$$

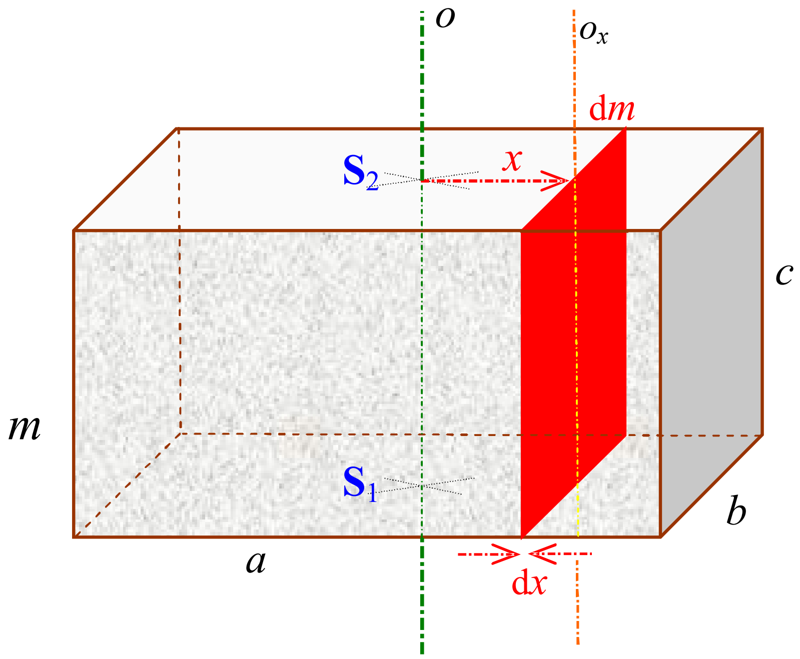
Výsledek je pro danou desku přesně poloviční ve srovnání s hodnotou momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem desky kolmo na rovinu této desky.

* * *

Na závěr tohoto přehledu ukážu ještě několik výpočtů, při nichž budeme vycházet z právě odvozených vztahů pro moment setrvačnosti tyče, obdélníkové a kruhové desky, a navíc při postupu využijeme platnosti Steinerovy věty.

Moment setrvačnosti kvádru

a) vzhledem k ose procházející středem jeho horní a dolní podstavy



Rozměry kvádru si označím a (délka), b (šířka), c (výška). Rotační osa bude tedy rovnoběžná s hranou c.

Pro výpočet momentu setrvačnosti si kvádr „rozsekám“ na jednotlivé nekonečně tenké obdélníkové destičky o rozměrech b a c a o „tloušťce“ dx. Tyto destičky jsou rovnoběžné jednak s rotační osou a jednak s boční stěnou kvádru.

Kdybych počítal moment setrvačnosti každé takové destičky vzhledem k ose o_x, jež leží v její rovině a navíc je s osou o rovnoběžná, použil bych zde odvozeného vztahu pro obdélníkovou desku

$$\mathrm{d}J_x = \frac{1}{12} b^2 \,\mathrm{d}m \quad .$$

Jelikož však počítám moment setrvačnosti J kvádru a tudíž i zvolené infinitezimální destičky dJ vzhledem k ose o, musím v tomto případě použít Steinerovu větu. Podle ní platí

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}J_x + x^2 \,\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) \mathrm{d}m \quad ,$$

kde x je právě vzdálenost dvou rovnoběžných os o_x a o.

K určení nekonečně malé hmotnosti destičky dm využijeme tradiční úměru, tentokráte mezi hmotnostmi a objemy naší destičky a celého kvádru

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{bc\mathrm{d}x}{abc} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{a}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Tedy

$$\mathrm{d}J = \frac{m}{a}\cdot\left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\mathrm{d}x$$

a moment setrvačnosti J celého kvádru

$$J = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{d}J = 2\cdot\frac{m}{a}\int_0^{+\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{m}{a}\left[\frac{1}{12}b^2 x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{+\frac{a}{2}} = 2\cdot\frac{m}{a}\left(\frac{ab^2}{24} + \frac{a^3}{24}\right) =$$

sudá fce

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{m}{a}\cdot a\left(b^2 + a^2\right) \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{12}\, m\left(a^2 + b^2\right)} \quad .$$

.

Pozn.: **1)** Povšimněte si, že konečný výraz vůbec neobsahuje délku hrany c, tedy hrany, jež je v našem případě s rotační osou rovnoběžná.

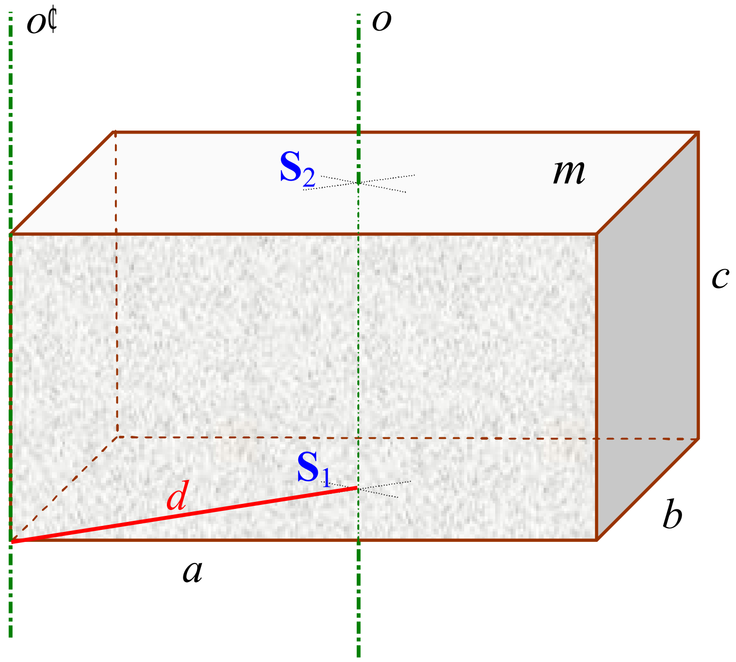
2) Kdyby byla rotační osa vedena středem levé a pravé boční stěny, a tedy by byla rovnoběžná s hranou délky a, dostali bychom ekvivalentní výraz tentokráte ve tvaru

$$\boxed{J = \frac{1}{12}\, m\left(b^2 + c^2\right)} \quad ;$$

a kdyby rotační osa procházela středem přední a zadní stěny kvádru (rovnoběžně s hranou délky b), platilo by

$$\boxed{J = \frac{1}{12}\, m\left(a^2 + c^2\right)} \quad .$$

b) vzhledem k ose totožné s boční hranou kvádru



V tomto případě stačí k určení momentu setrvačnosti J' znalost předcházejících odvozených vztahů a znovu i Steinerovy věty.

Nechť je osa o' proložena hranou délky c spojující horní a dolní podstavu. Vzdálenost obou rovnoběžných os d je rovna právě polovině úhlopříčky dolní (resp. horní) podstavy kvádru

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad .$$

V souladu se Steinerovou větou musí platit

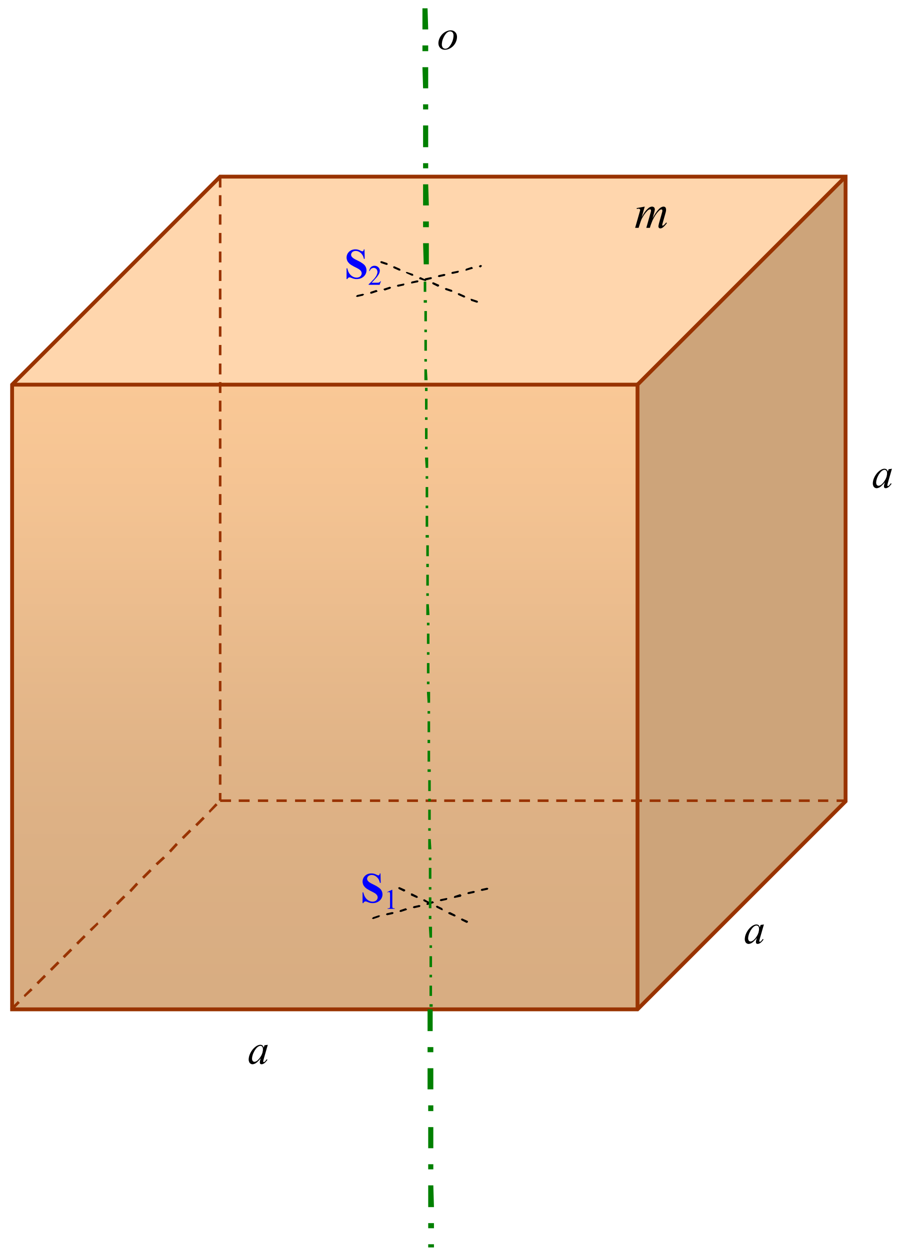
$$J' = J + m\,d^2 = \frac{1}{12}\,m\,(a^2+b^2) + m \cdot \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m\,(a^2+b^2) \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{3}\,m\,(a^2+b^2)} \quad .$$

Ekvivalentní výrazy bychom získali i pro dva zbývající případy, jež u kvádru připadají v úvahu (osa. o' proložená hranou a, resp. b).

Moment setrvačnosti krychle

vzhledem k ose procházející středy jejích protějších stěn

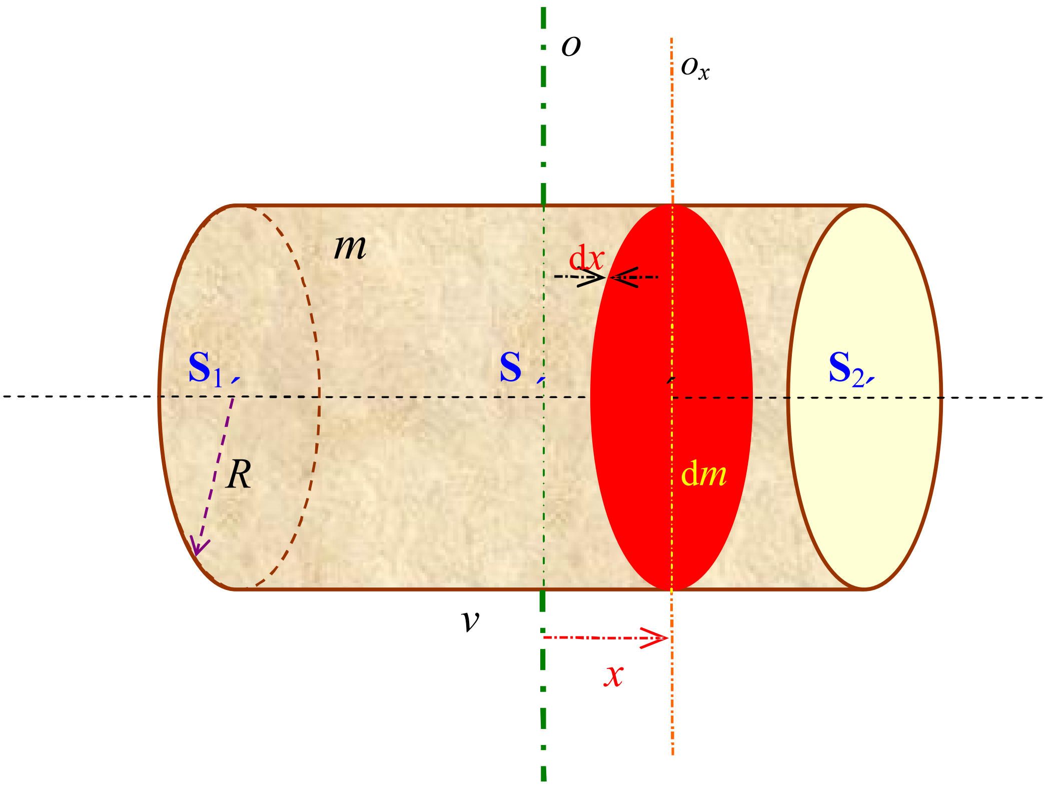


Jelikož u krychle platí $a = b = c$, dostáváme okamžitě bez složitého počítání, jen pouhým dosazením do libovolného výrazu pro moment setrvačnosti kvádru (vzhledem k ose vedené středy protějších stěn), že moment setrvačnosti krychle

$$\boxed{J = \frac{1}{6} m a^2} \quad .$$

Moment setrvačnosti válce

vzhledem k ose procházející hmotným středem válce kolmo na spojnici středů jeho podstav



Válec má hmotnost m, poloměr podstavy R a výšku v, orientace rotační osy o je dobře patrná z obrázku.

Toto těleso si „rozkrájím" na jednotlivé nekonečně tenké kruhové destičky rovnoběžné s rotační osou (a také s podstavami válce). Jejich hmotnost je dm, mají poloměr podstavy R a nekonečně malou tloušťku dx.

Podobně jako u kvádru i zde si nejprve vyjádřím moment setrvačnosti dJ_x každé takové destičky vzhledem k ose o_x, jež leží v její rovině a je navíc s osou o rovnoběžná. V takovém případě platí

$$\mathrm{d}J_x = \frac{1}{4} R^2 \,\mathrm{d}m \quad .$$

Moment setrvačnosti J válce a tudíž i moment setrvačnosti dJ zvolené infinitezimální destičky ale počítáme vzhledem k ose o, a proto musím i v tomto případě použít Steinerovu větu. Podle ní dostávám

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}J_x + x^2 \,\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2\right) \mathrm{d}m \quad ,$$

kde x je právě vzdálenost dvou rovnoběžných os o_x a o.

Nekonečně malou hmotnost destičky dm určíme opět úměrou mezi hmotnostmi a objemy této destičky a celého válce

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\pi R^2 \,\mathrm{d}x}{\pi R^2 v} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{m}{v}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Po dosazení do výrazu získaného aplikací Steinerovy věty dostanu, že

$$\mathrm{d}J = \frac{m}{v}\cdot\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\mathrm{d}x \quad .$$

Nyní už jen zbývá provést konečnou integraci všech momentů setrvačnosti dJ přes celou výšku válce. Vzhledem k umístění rotační osy budeme integrovat proměnnou x v mezích od $-v/2$ do $+v/2$. Jelikož se opět jedná o integraci funkce sudé v opačných mezích, tak znovu využijeme možnosti integrovat dJ pouze od nuly do $+v/2$ a výsledek vynásobit dvěma.

Postupně dostávám

$$J = \int_{-\frac{v}{2}}^{+\frac{v}{2}} \mathrm{d}J = 2\cdot\int_{0}^{+\frac{v}{2}} \mathrm{d}J = 2\cdot\frac{m}{v}\int_{0}^{+\frac{v}{2}}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{m}{v}\left[\frac{1}{4}R^2 x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{+\frac{v}{2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{m}{v}\left(\frac{R^2 v}{8} + \frac{v^3}{24}\right) = 2\cdot\frac{m}{v}\cdot\frac{v}{8}\cdot\left(R^2 + \frac{v^2}{3}\right) \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{4}m\left(R^2 + \frac{v^2}{3}\right)} \quad .$$

Pozn.: Povšimněte si, že tentokráte ve výsledném vztahu vystupují oba dva rozměry válce, jak výška v, tak i poloměr podstavy R. Je to logické, neboť na obou záleží, jak je hmotnost válce kolem rotační osy o rozložena.

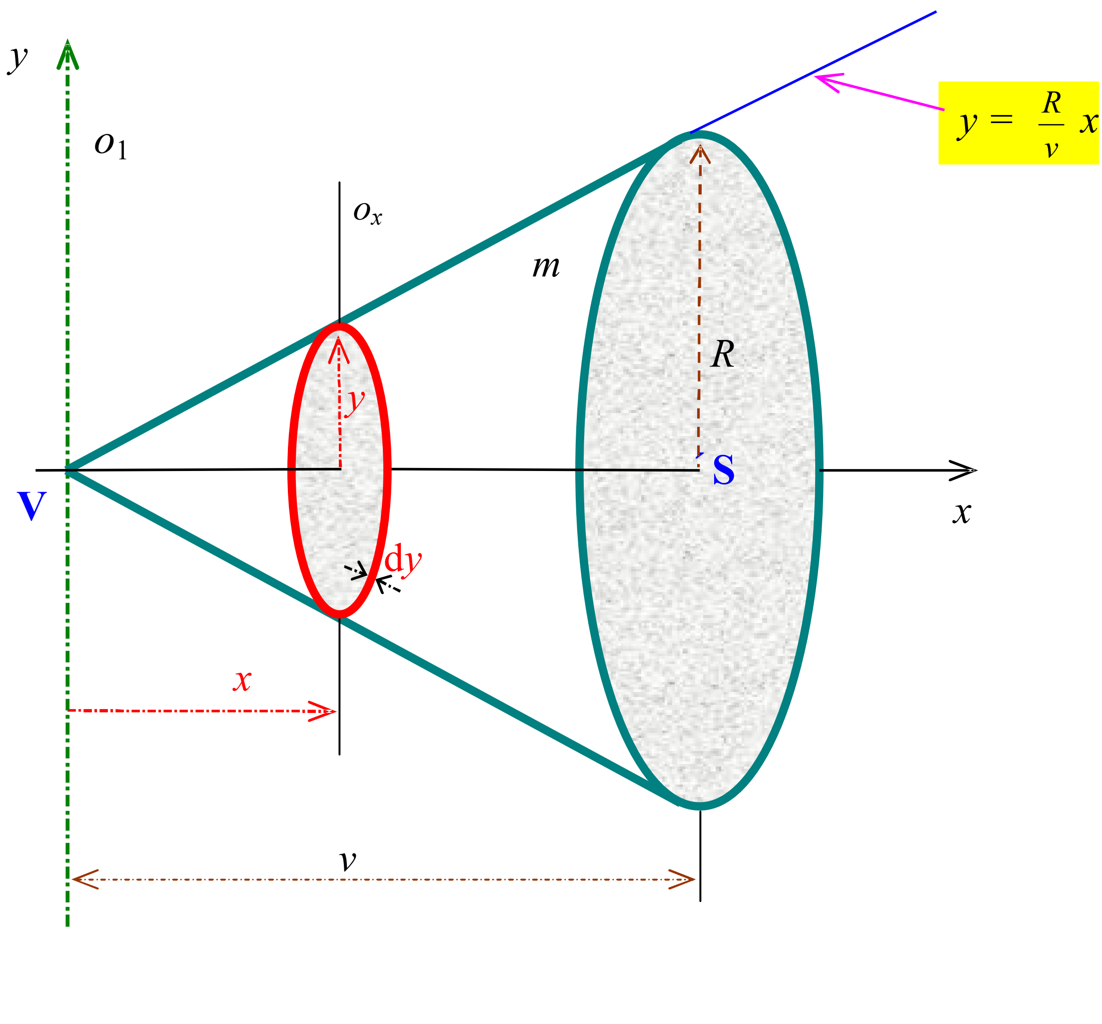
Moment setrvačnosti kužele

vzhledem k různým osám kolmo orientovaným na spojnici vrcholu a středu podstavy

Tato úloha je zajímavá nejen z matematického hlediska, protože nás důkladně procvičí při úpravách ne zrovna přehledných vztahů, ale opět se zde potvrdí i známé fyzikální zákonitosti jako je Steinerova věta.

a) rotační osa procházející vrcholem kužele kolmo na spojnici vrcholu a středu podstavy

Tato úloha, jak se ukáže dále, vyžaduje relativně nejméně úprav při počítání. Zvolme si opět souřadnou soustavu x, y s počátkem ve vrcholu kužele. Osa x prochází vrcholem **V** a středem podstavy **S** kužele, osa y je k ní vedena kolmo vrcholem kužele a je v tomto případě právě rotační osou označenou jako o_1.



Opět uplatníme „salámovou“ metodu aplikovanou již u kvádru i válce. Nekonečně malou hmotností dm bude každá nekonečně tenká kruhové destička rovnoběžná s podstavou kužele a vzdálená od vrcholu x. Bude mít poloměr obecně y a infinitezimální tloušťku dx. Vzhledem k ose o_x ležící v rovině této destičky bude mít tato moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J_x = \frac{1}{4}\, y^2\, \mathrm{d}m \quad .$$

Vzhledem k „naší“ ose $o_1 \parallel o_x$ je ale moment setrvačnosti tohoto elementu větší, jak nám uvádí Steinerova věta. Snadno spočítáme, že

$$\mathrm{d}J_1 = \mathrm{d}J_x + x^2\, \mathrm{d}m = \left(\frac{1}{4} y^2 + x^2\right)\mathrm{d}m \quad .$$

Nekonečně malá hmotnost destičky dm nám vyjde z úměry mezi hmotnostmi a objemy dané destičky a celého kužele

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\pi\, y^2\, \mathrm{d}x}{\frac{1}{3}\pi R^2 v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{3m}{R^2 v}\, y^2\, \mathrm{d}x \quad .$$

Toto nekonečně malé dm dosadím do výrazu získaného pomocí Steinerovy věty a dostanu

$$\mathrm{d}J_1 = \frac{3m}{R^2 v} \cdot \left(\frac{1}{4} y^2 + x^2\right) y^2\, \mathrm{d}x \quad .$$

Posledním „přípravným“ krokem před závěrečnou integrací je nahrazení proměnné y proměnnou x, podle níž budu integrovat jednotlivé momenty dJ_1. To je však v tomto případě díky umístění rotační osy o_1 do vrcholu kužele naprosto triviální. Platí totiž přímá úměrnost

$$y = \frac{R}{v}\, x \quad .$$

Tím pádem

$$\mathrm{d}J_1 = \frac{3m}{R^2 v} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} \cdot x^2 + x^2\right) \cdot \frac{R^2}{v^2} \cdot x^2\, \mathrm{d}x = \frac{3m}{v^3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} + 1\right) \cdot x^4\, \mathrm{d}x$$

a konečně

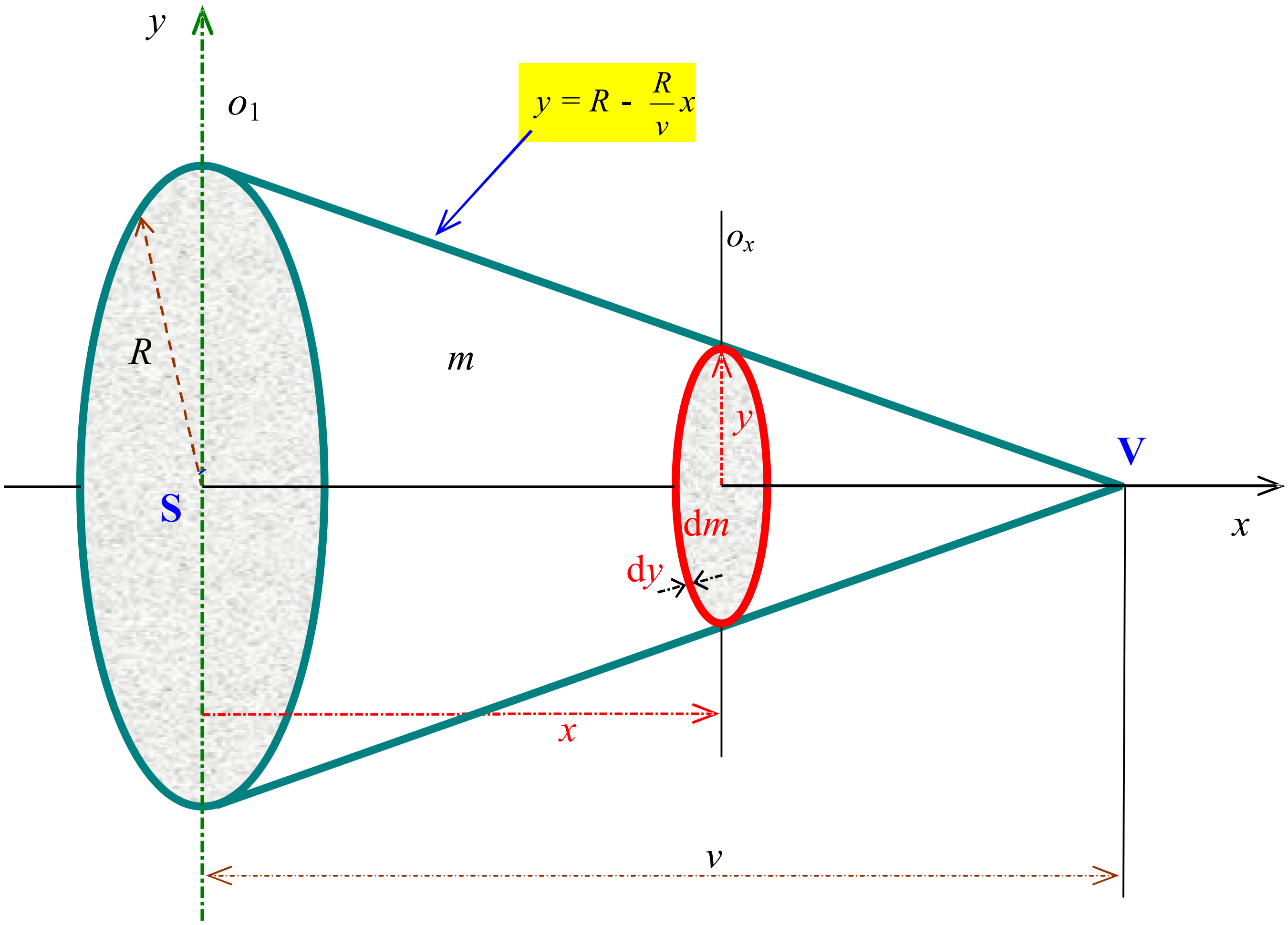
$$J_1 = \int_{x=0}^{v} \mathrm{d}J_1 = \frac{3m}{v^3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} + 1\right) \int_{x=0}^{v} x^4\, \mathrm{d}x = \frac{3m}{v^3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} + 1\right) \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{v} =$$

$$= \frac{3m}{v^3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} + 1\right) \cdot \frac{v^5}{5} = \frac{3mv^2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{R^2}{v^2} + 1\right) \quad ,$$

$$\boxed{J_1 = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + 4v^2)} \quad .$$

b) rotační osa ležící v rovině podstavy kužele

V tomto případě si už započítáme o trochu víc. Souřadnou soustavu os x, y zvolíme tentokráte s počátkem ve středu podstavy kužele. Osa x bude procházet vrcholem **V** kužele a ní kolmá osa y bude současně i osou rotační – označím ji jako osu o_2.



Postup je prakticky stejný jako v předcházejícím případě při výpočtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose o_1. Liší se pouze v jednom „drobném“ detailu, a sice v závislosti mezi proměnnými x a y. Tentokráte to nebude přímá úměrnost, ale klesající lineární funkce

$$y = R - \frac{R}{v}x \quad .$$

Pro moment setrvačnosti dJ_2 tenké kruhové destičky nekonečně malé hmotnosti dm vzhledem k ose o_2 bude platit naprosto stejný výraz jako v předcházejícím případě **a)**, tedy

$$\mathrm{d}J_2 = \frac{3m}{R^2 v}\cdot\left(\frac{1}{4}y^2 + x^2\right) y^2\,\mathrm{d}x \quad .$$

Po úpravě a nahrazení proměnné y proměnnou x dostávám

$$\mathrm{d}J_2 = \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left(y^4 + 4x^2 y^2\right)\mathrm{d}x = \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left(\left(R - \frac{R}{v}x\right)^4 + 4x^2\left(R - \frac{R}{v}x\right)^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left(R^4 - 4\frac{R^4}{v}x + 6\frac{R^4}{v^2}x^2 - 4\frac{R^4}{v^3}x^3 + \frac{R^4}{v^4}x^4 + 4x^2R^2 - 8\frac{R^2}{v}x^3 + 4\frac{R^2}{v^2}x^4\right)\mathrm{d}x \quad .$$

Tento výraz budeme nyní integrovat od podstavy kužele ($x = 0$) až po jeho vrchol ($x = v$):

$$J_2 = \int_{x=0}^{v}\mathrm{d}J_2 = \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\int_{x=0}^{v}\left(R^4 - 4\frac{R^4}{v}x + 6\frac{R^4}{v^2}x^2 - 4\frac{R^4}{v^3}x^3 + \frac{R^4}{v^4}x^4 + 4x^2R^2 - 8\frac{R^2}{v}x^3 + 4\frac{R^2}{v^2}x^4\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left[R^4 x - 4\frac{R^4}{v}\cdot\frac{x^2}{2} + 6\frac{R^4}{v^2}\cdot\frac{x^3}{3} - 4\frac{R^4}{v^3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{R^4}{v^4}\cdot\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3}R^2 - 8\frac{R^2}{v}\cdot\frac{x^4}{4} + 4\frac{R^2}{v^2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{v} =$$

$$= \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left(R^4 v - 2R^4 v + 2R^4 v - R^4 v + \frac{1}{5}R^4 v + \frac{4}{3}R^2 v^3 - 2R^2 v^3 + \frac{4}{5}R^2 v^3\right) =$$

$$= \frac{3m}{4R^2 v}\cdot\left[\frac{1}{5}R^4 v + \left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{5}\right)\cdot R^2 v^3\right] = \frac{3m}{4R^2 v}\cdot R^2 v\cdot\left[\frac{1}{5}R^2 + \frac{20 - 30 + 12}{15}\cdot v^2\right] =$$

$$= \frac{3}{4}m\cdot\left(\frac{1}{5}R^2 + \frac{2}{15}v^2\right) \quad ,$$

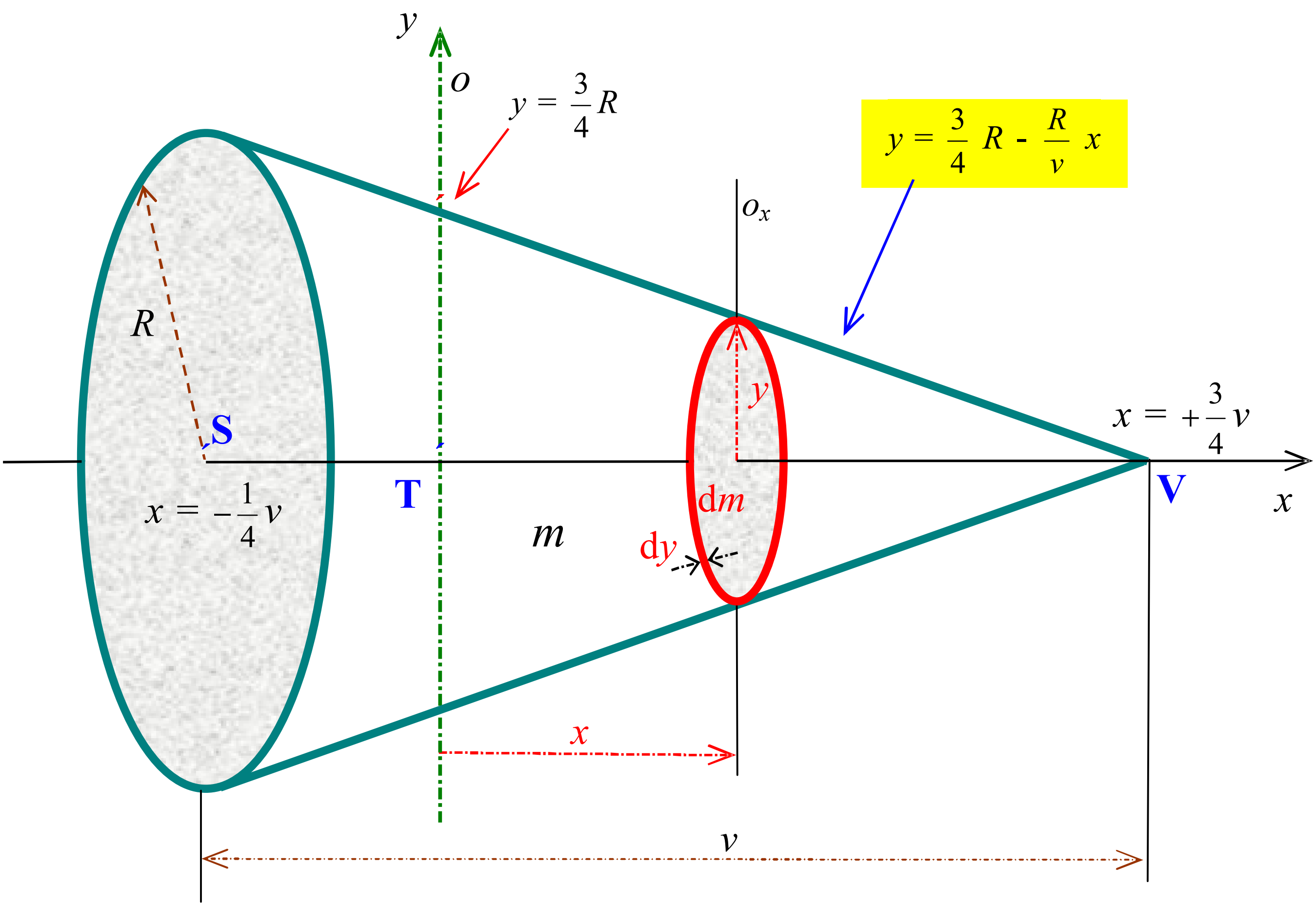
$$\boxed{J_2 = \frac{3}{20}\,m\,(R^2 + \frac{2}{3}v^2)} \quad .$$

Pozn.: Porovnáním obou výsledků je na první pohled patrné, že moment setrvačnosti J_2 kužele vzhledem k ose o_2 je menší než moment setrvačnosti J_1 téhož tělesa vzhledem k ose o_1. To je ale zcela v souladu s tím, co tato fyzikální veličina charakterizuje – ve druhém případě je hmotnost m kužele přeci jen soustředěna „blíže“ rotační ose o_2, než jak je tomu v případě prvním u rotační osy o_1.

c) rotační osa procházející hmotným středem (těžištěm) kužele kolmo k výšce kužele

Je před námi poslední případ – osa (označme ji prostě *o*) prochází hmotným středem kužele. K tomu ale potřebujeme znát, že se tento bod nachází v jedné čtvrtině vzdálenosti měřeno od středu **S** podstavy kužele k jeho vrcholu **V**. Tato skutečnost bude znamenat jen další komplikaci ve výpočtu, jenž ale jinak bude probíhat podle naprosto stejného „scénáře", jaký byl použit v předcházejících dvou případech.

Vzhledem k tomu, že rotační osa (opět to bude osa *y*) musí procházet počátkem soustavy souřadnic, bude platit opět jiný vztah mezi proměnnými *x* a *y* a navíc konečnou integraci budeme tentokrát provádět v mezích od $-1/4v$ do $+3/4v$, jež mají obě nenulovou hodnotu.



Závislosti mezi proměnnými *x* a *y* je dána rovnicí přímky, kterou v obrázku představuje strana kužele. Její rovnice ve směrnicovém tvaru (jak si snadno můžete sami odvodit) je

$$y = \frac{3}{4}R - \frac{R}{v}x \quad .$$

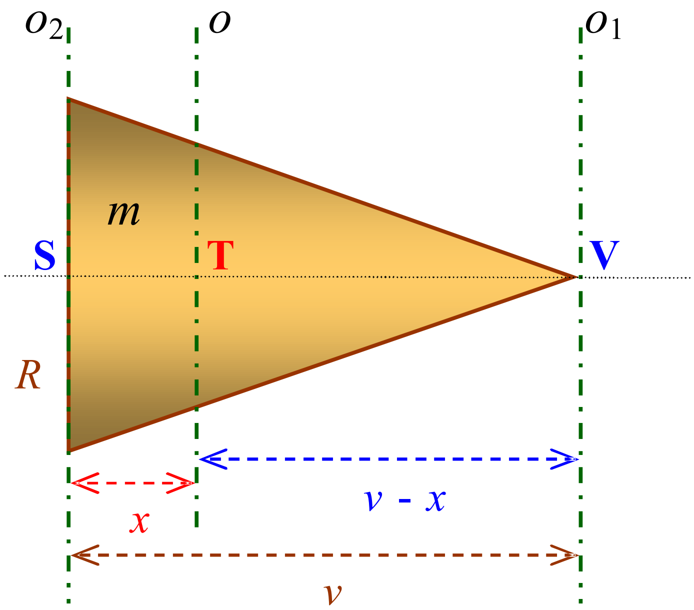
A zase bychom při výpočtu vyšli od výrazu pro moment setrvačnosti d*J* tenké kruhové destičky nekonečně malé hmotnosti d*m*, jež se nachází v jisté obecné vzdálenosti *x* ($-\frac{1}{4}v \le x \le +\frac{3}{4}v$) od rotační osy *o*

$$\mathrm{d}J = \frac{3m}{R^2 v}\cdot\left(\frac{1}{4}y^2 + x^2\right)y^2\,\mathrm{d}x \quad .$$

Dosadili bychom za proměnnou y, upravili bychom tak, abychom mohli dJ integrovat jako mnohočlen (byl by opět pátého stupně) v uvedených mezích a po konečné úpravě výrazu získaného integrací bychom měli dospět k výsledku

$$\boxed{J = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{1}{4} v^2)} \quad .$$

Můžete si to zkusit – recept jsem vám právě nabídnul. Ale je tu ještě jedna – schůdnější – cesta. Což takhle znovu vytěžit z už tolikrát aplikované Steinerovy věty?



Tentokráte jí ale využijeme – dalo by se říct – v opačném směru.

Pro momenty setrvačnosti kužele o poloměru podstavy R, výšce v a hmotnosti m vzhledem k osám o, o_1 a o_2 musí platit v souladu se zmíněnou větou vztahy

$$J_1 = J + m\,(v - x)^2 \ , \quad (1)$$

$$J_2 = J + m\,x^2 \ . \qquad (2)$$

Jednoduchým porovnáním obou dostávám

$$J_1 - m\,(v - x)^2 = J_2 - m\,x^2 \ .$$

A po dosazení za J_1 resp. J_2

$$\frac{3}{20}\, m\,(R^2 + 4v^2) - m\,(v - x)^2 = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{2}{3} v^2) - m\,x^2 \quad /:m \quad \& \quad / ´\ 20$$

$$3\,R^2 + 12\,v^2 - 20\,v^2 + 40\,v\,x - 20\,x^2 = 3\,R^2 + 2\,v^2 - 20\,x^2$$

$$40\,v\,x = 10\,v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{4}\, v}$$ (což potvrzuje polohu těžiště kužele).

Zbývá už jen dosadit do vztahu (1) nebo (2) a dostanu, co dostat máme:

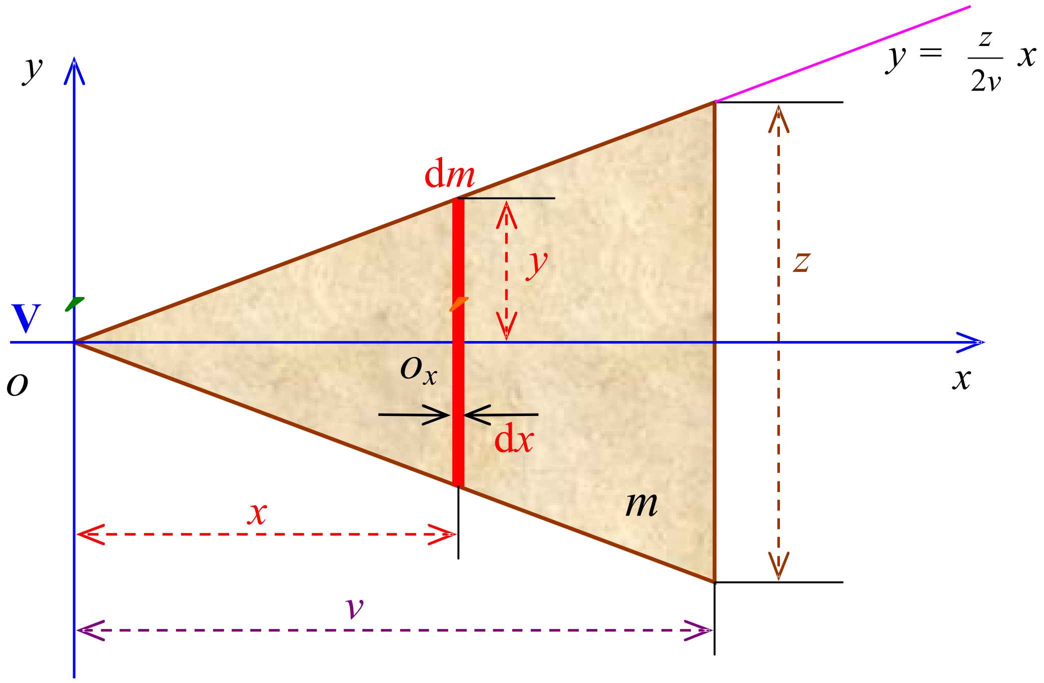
$$J = J_2 - m\,x^2 = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{2}{3} v^2) - m\left(\frac{1}{4} v\right)^2 = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{2}{3} v^2 - \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{16}\, v^2) =$$

$$= \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{2}{3} v^2 - \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{16}\, v^2) = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{2}{3} v^2 - \frac{5}{12}\, v^2) = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{3}{12} v^2) \ ,$$

$$\boxed{J = \frac{3}{20}\, m\,(R^2 + \frac{1}{4} v^2)} \quad .$$

Moment setrvačnosti rovnoramenného trojúhelníka

vzhledem k ose procházející vrcholem trojúhelníka proti základně kolmo k jeho rovině



Rotační osa o i pomocná osa o_x jsou tentokráte orientovány kolmo k rovině nákresny (kolmo k obrazovce počítače). Elementární tyčka o hmotnosti dm má konečnou délku y a nekonečně malou tloušťku dx. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose o_x, jež je k tyčce kolmá a prochází jejím středem je možno vyjádřit známým vztahem odvozeným už na začátku tohoto výkladu

$$\mathrm{d}J_x = \frac{1}{12}\,\mathrm{d}m\,(2y)^2 = \frac{1}{3}\,y^2\,\mathrm{d}m$$

a následně i vzhledem k rotační ose o

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}J_x + x^2\,\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{3}y^2 + x^2\right)\mathrm{d}m \quad .$$

Pro nekonečně malou hmotnost dm platí jednoduchá úměra

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{2y\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}z\cdot v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = 4m\,\frac{y}{z\cdot v}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Po dosazení této infinitezimální hmotnosti pak dostávám

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{1}{3}y^2 + x^2\right)\mathrm{d}m = 4m\,\frac{y}{z\cdot v}\cdot\left(\frac{1}{3}y^2 + x^2\right)\mathrm{d}x \quad .$$

Jelikož mezi proměnnými y a x platí přímá úměrnost

$$y = \frac{z}{2v}\, x \quad ,$$

mohu se snadno ve vztahu pro moment setrvačnosti dJ „zbavit“ proměnné y a připravit si tak výraz pro integraci všech elementů dJ v mezích od x = 0 (vrchol trojúhelníka) až po x = v (střed jeho základny).

Tedy

$$\mathrm{d}J = 4m\,\frac{y}{z\cdot v}\cdot\left(\frac{1}{3}y^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = 4m\cdot\frac{\frac{z}{2v}\cdot x}{z\cdot v}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{4v^2}\cdot x^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2m}{v^2}\cdot\left(\frac{z^2}{12v^2}+1\right)x^3\,\mathrm{d}x \quad .$$

A konečně

$$J = \int_{x=0}^{v}\mathrm{d}J = \frac{2m}{v^2}\cdot\left(\frac{z^2}{12v^2}+1\right)\int_{y=0}^{v}x^3\,\mathrm{d}x = \frac{2m}{v^2}\cdot\left(\frac{z^2}{12v^2}+1\right)\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^v =$$

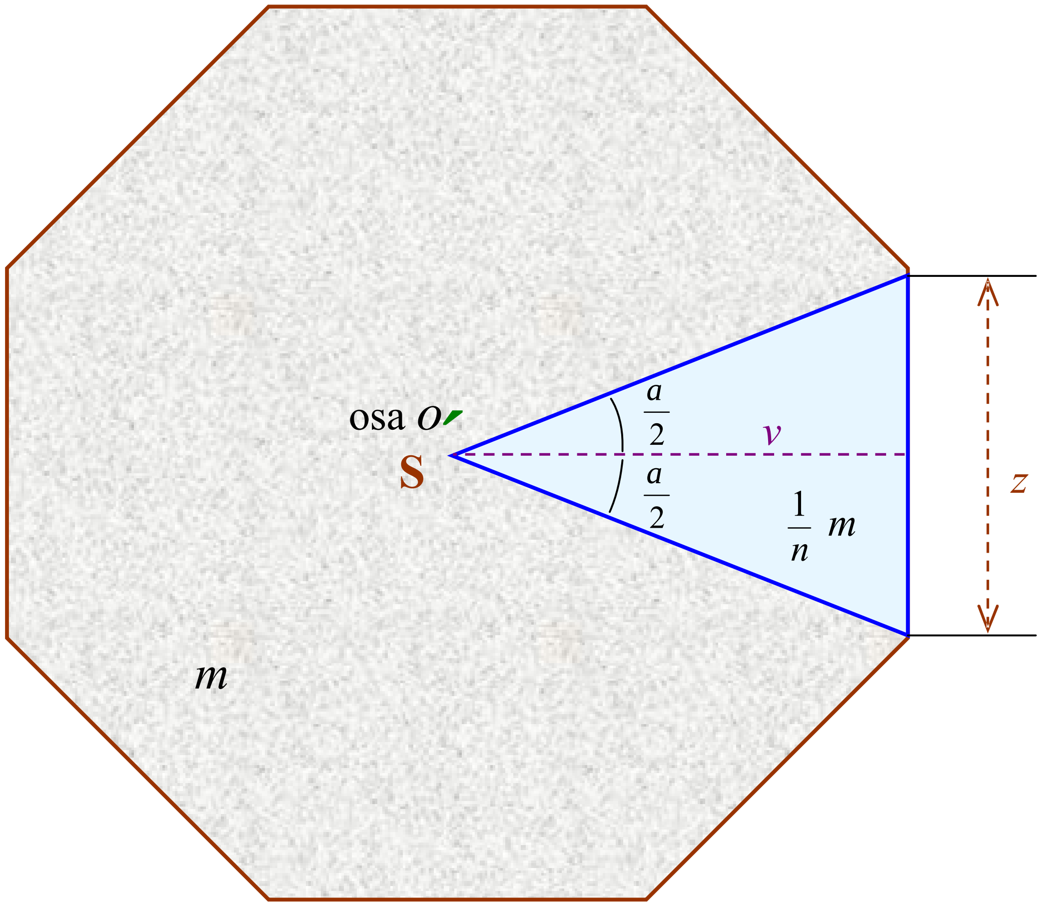
$$= \frac{2m}{v^2}\cdot\left(\frac{z^2}{12v^2}+1\right)\cdot\frac{v^4}{4} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{z^2+12v^2}{12v^2}\cdot v^2 \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{24}\, m\,(z^2 + 12\,v^2)} \quad .$$

Pozn.: Právě odvozený vzorec nám následně velmi dobře poslouží u už posledního úkolu, který máme ještě před sebou, a sice při určování momentu setrvačnosti pravidelného n-úhelníka. Takový obrazec si vždy můžeme snadno rozdělit právě na n rovnoramenných trojúhelníků. Moment setrvačnosti J_1 každého z nich spočítat umíme a ke konečnému výsledku nám už bude stačit jen příslušnou hodnotu J_1 vynásobit číslem n.

Moment setrvačnosti pravidelného mnohoúhelníka

vzhledem k ose procházející středem mnohoúhelníka kolmo k jeho rovině



Na obrázku je sice znázorněn osmiúhelník, ale já budu uvažovat v obecné rovině o pravidelném obrazci s celkovým počtem n stran. V takovém případě stačí k jeho úplnému určení znát délku každé jeho strany – tu si označím v souladu s předcházejícím odvozením jako z, a dále budu předpokládat, že hmotnost obrazce je m.

Pravidelný n-úhelník si rozdělím na n rovnoramenných trojúhelníků o základně z a o výšce

$$v = \frac{\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \frac{z}{2\,.\operatorname{tg}\frac{a}{2}} \quad .$$

Jelikož pro úhel a nutně platí

$$a = \frac{360^{\circ}}{n} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{180^{\circ}}{n} \quad ,$$

bude výška v v rovnoramenném trojúhelníku

$$v = \frac{z}{2\,.\,\mathrm{tg}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{n}\right)} = \frac{z}{2}\cdot \mathrm{cotg}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{n}\right) \quad .$$

Hmotnost každého z n rovnoramenných trojúhelníků bude logicky $\frac{1}{n}\cdot m$, takže nezbývá už nic jiného, než dosadit do vztahu pro moment setrvačnosti celé n-úhelníkové desky

$$J = n\,.\,J_1 = n\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left(z^2 + 12\,v^2\right) = \frac{1}{24}\cdot m\cdot\left[z^2 + 12\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2\cdot \mathrm{cotg}^2\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{n}\right)\right] \quad ,$$

$$\boxed{J = \frac{1}{24}\,m\,z^2\left[1 + 3\,\mathrm{cotg}^2\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{n}\right)\right]} \quad .$$

Pozn.: Podobně jako v případě jiných těles, lze i nyní platnost tohoto vzorce rozšířit na pravidelný homogenní n-boký hranol, jehož strana podstavy má délku z bez ohledu na to, jaká je výška v hranolu. Rotační osa o musí ale pochopitelně procházet středy obou jeho podstav.

* * *

Na úplný závěr našeho výkladu o momentech setrvačnosti pravidelných homogenních těles si vyřešme ještě jednu zajímavou úlohu.

Úloha: Porovnejte momenty setrvačnosti dvou pravidelných homogenních těles – kruhové desky a desky n-úhelníkové, jež mají obě stejnou hmotnost m i stejný obvod, vzhledem k ose procházející jejich středem kolmo k rovině desek.

Mají-li obě tělesa navlas stejnou hmotnost i obvod, neměly by se jejich momenty setrvačnosti příliš lišit. A tento rozdíl by měl být logicky tím menší, čím větší počet stran bude mít n-úhelníková deska. Je snad na první pohled patrné, že s rostoucím n se bude n-úhelník stále víc a víc svým tvarem „přibližovat“ kruhu.

Jde jen o to, zvolit si vhodné označení veličin. Vzhledem k větší složitosti vztahu pro moment setrvačnosti n-úhelníkové desky, zůstane naší „výchozí“ veličinou délka z jedné strany n-úhelníka. Jeho obvod (a tedy i obvod kruhové desky) bude

$$n\,z = 2\pi R \quad ,$$

odkud hned dostávám pro poloměr kruhové desky

$$R = \frac{n\,z}{2\pi} \quad .$$

Tento poloměr dosadím do vztahu

$$J_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,m\,R^2$$

a vyjádřím tak moment setrvačnosti J_k kruhové desky pomocí její hmotnosti m a délky z jako

$$J_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{n\,z}{2\pi}\right)^2 = \frac{n^2}{8\,\pi^2}\cdot m\,z^2 \quad .$$

Moment setrvačnosti J_n pravidelné n-úhelníkové desky známe. Je dán posledním odvozeným vztahem

$$J_\mathrm{n} = \frac{1}{24}\,m\,z^2\left[1 + 3\cot g^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right] \quad .$$

Zbývá tedy už jen provést závěrečné porovnání obou hodnot. Platí, že

$$\frac{J_\mathrm{k}}{J_\mathrm{n}} = \frac{\dfrac{n^2}{8\,\pi^2}\cdot mz^2}{\dfrac{1}{24}\cdot mz^2\left[1 + 3\cot g^2\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)\right]} \quad ,$$

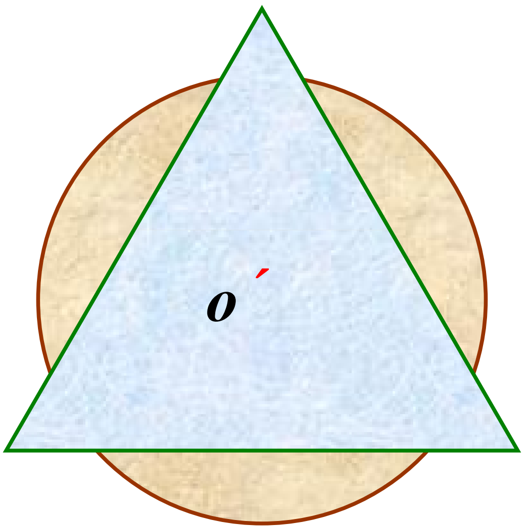
$$\boxed{\frac{J_\mathrm{k}}{J_\mathrm{n}} = \frac{3n^2}{\pi^2\left[1 + 3\cot g^2\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)\right]}} \quad .$$

Následující tabulka pak uvádí hodnoty tohoto poměru pro různé n-úhelníkové desky. Logicky se nejvíc oba momenty setrvačnosti liší při porovnání kruhu a rovnostranného trojúhelníka, kde vychází moment setrvačnosti kruhové desky o víc jak 36 % větší. Procenta ve prospěch kruhu se však s rostoucím n poměrně rychle snižují, např. u „našeho“ osmiúhelníka ze strany 39 je to už jen něco málo přes 5 % a pod jedno procento se dostaneme již u pravidelného devatenáctiúhelníka.

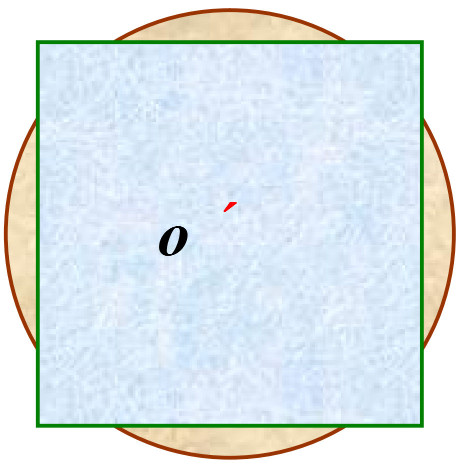
Tabulka

Porovnání momentů setrvačnosti kruhové a n-úhelníkové desky stejné hmotnosti i stejného obvodu vzhledem k ose procházející jejich středem kolmo k rovině desek.

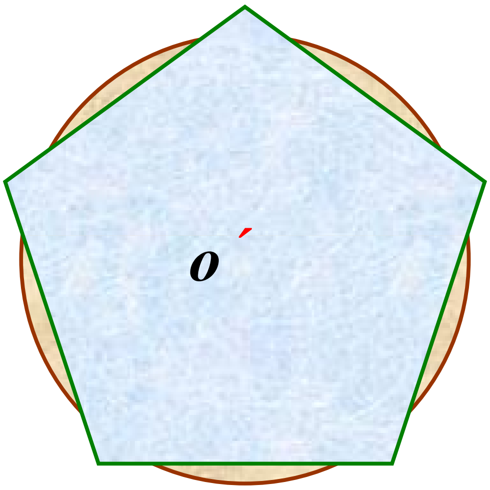
n	$\frac{J_k}{J_n}$	n	$\frac{J_k}{J_n}$	n	$\frac{J_k}{J_n}$	n	$\frac{J_k}{J_n}$
3	1,36784	23	1,00623	43	1,00178	63	1,00083
4	1,21585	24	1,00572	44	1,00170	64	1,00080
5	1,13703	25	1,00527	45	1,00163	65	1,00078
6	1,09427	26	1,00488	46	1,00156	66	1,00076
7	1,06877	27	1,00452	47	1,00149	67	1,00073
8	1,05239	28	1,00420	48	1,00143	68	1,00071
9	1,04124	29	1,00392	49	1,00137	69	1,00069
10	1,03331	30	1,00366	50	1,00132	70	1,00067
11	1,02747	31	1,00343	51	1,00127	75	1,00059
12	1,02305	32	1,00322	52	1,00122	80	1,00051
13	1,01961	33	1,00302	53	1,00117	85	1,00046
14	1,01690	34	1,00285	54	1,00113	90	1,00041
15	1,01471	35	1,00269	55	1,00109	95	1,00036
16	1,01292	36	1,00254	56	1,00105	100	1,00033
17	1,01143	37	1,00241	57	1,00101	110	1,00027
18	1,01019	38	1,00228	58	1,00098	120	1,00023
19	1,00915	39	1,00216	59	1,00095	128	1,00020
20	1,00825	40	1,00206	60	1,00091	256	1,00005
21	1,00748	41	1,00196	61	1,00088	512	1,00001
22	1,00682	42	1,00187	62	1,00086	1024	1,00000



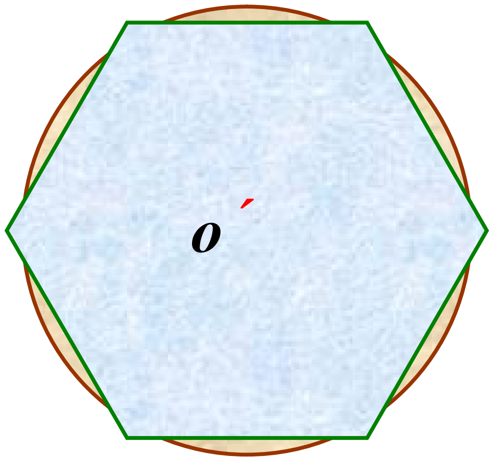
Kruh
a rovnostranný trojúhelník



Kruh a čtverec



Kruh
a pravidelný pětiúhelník



Kruh
a pravidelný šestiúhelník