Volné kmitání soustav se 2 stupni volnosti

U soustav s konečným počtem volnosti potřebujeme k určení polohy každého bodu soustavy v libovolném okamžiku n vzájemně nezávislých údajů. Obecně existuje na každé soustavě systém m nezávislých souřadnic, které nazýváme <u>zobecněné souřadnice Lagrangeovy</u> q_i (generalizované). Ve většině případů volíme jejich počet shodný s počtem dynamických stupňů volnosti, m=n. Volíme m>n, např. když vnější zatížení působí mimo soustředěné hmoty.

Pro řešení máme 2 metody.

1. **Metoda konstant tuhosti**
(někdy označována jako metoda pružnostních konstant)

Vychází z <u>matice tuhosti soustavy</u> [k] rozměru $[6 \cdot 6]$ {Q}=[k].{q}, kde:

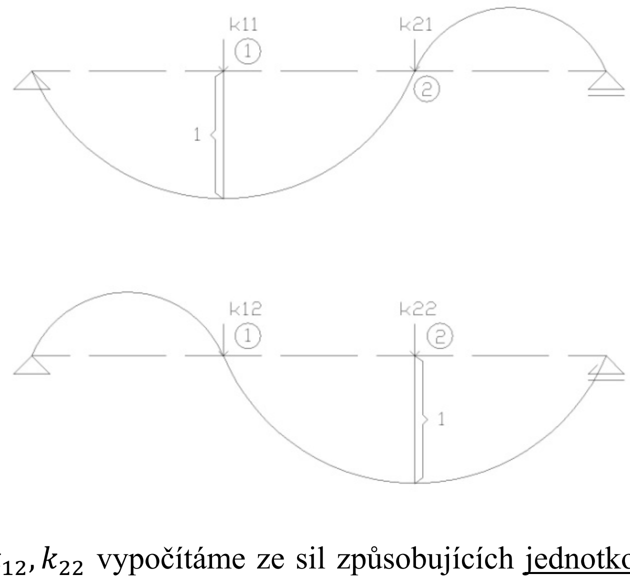
$\{Q\} = \{Q_1, Q_2, \dots Q_n\}^T$ jsou zobecněné síly působící na body, které charakterizují přemístění soustavy s n stupni volnosti

$\{q\} = \{q_{1,} q_{2,} \dots q_{n,}\}^T$ je vektor přemístění (zobrazuje posunutí nebo pootočení)

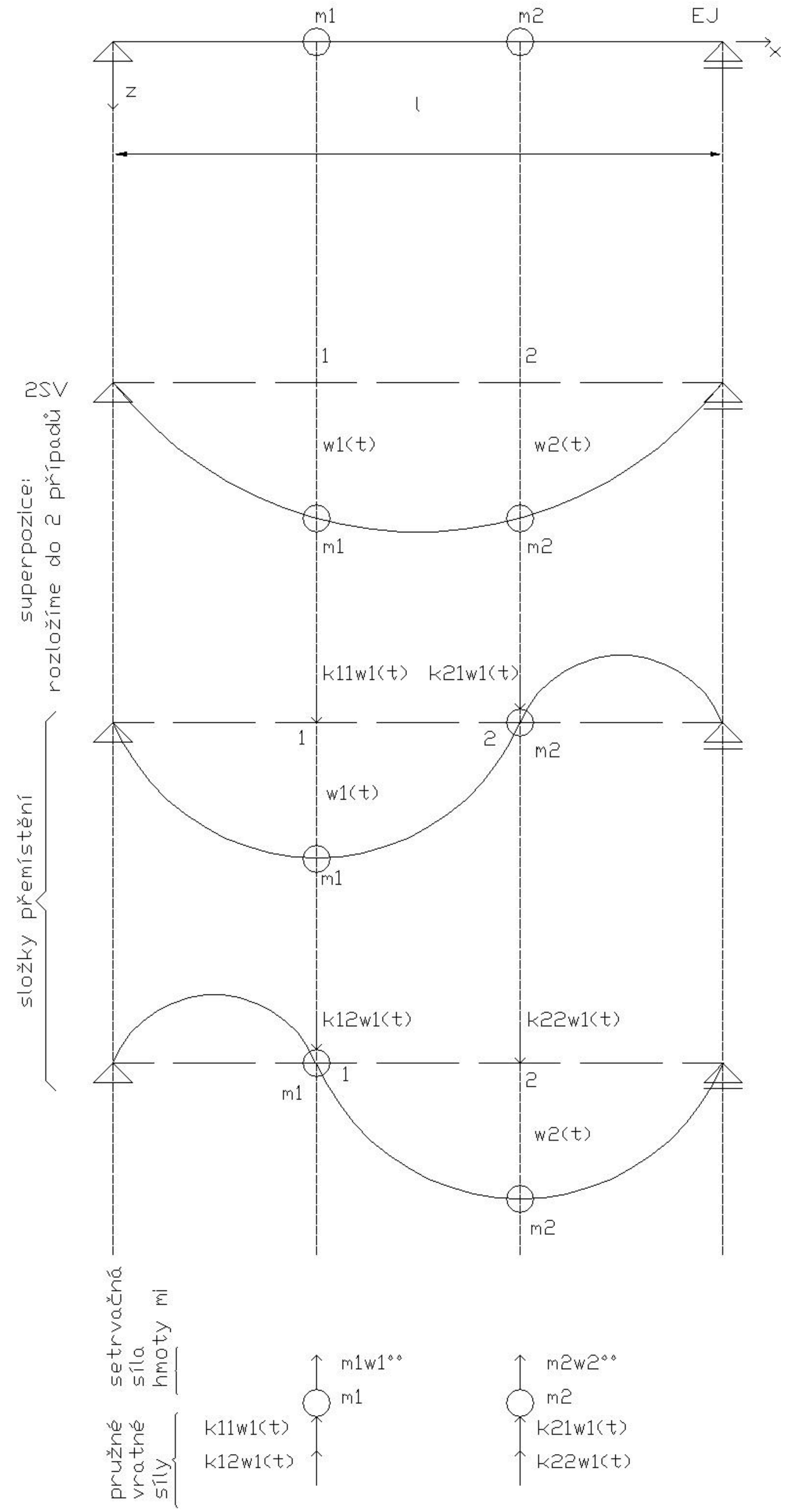
$\{q_{1,} q_{2,} \dots q_{n,}\}$…jsou zobecněné souřadnice

Provedeme řešení pro:
Nehmotný nosník se 2 soustředěnými hmotami na obrázku na následující stránce.

Přemístění v čase, neboli dynamická čára průhybu nosníku se rozkládá ve 2 přetvoření, kterým odpovídá určité zatížení v bodech 1 a 2



Síly $k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}$ vypočítáme ze sil způsobujících <u>jednotkové deformace</u>. Jsou to prvky matice tuhosti [konstanty tuhosti] a jsou to síly působící na soustředěné hmoty. Síly k_{ik} pokládáme za kladné ve směru kladné osy z, proto $k_{21} = k_{12}$ záporné. Jednotky prvků matice tuhosti [Nm, N, Nm].


m1
m2
EJ
x
z
l
1
2
2SV
w1(t)
w2(t)
m1
m2
superpozice:
rozložíme do 2 případů
k11w1(t)
k21w1(t)
1
2
m2
w1(t)
m1
složky přemístění
k12w1(t)
k22w1(t)
m1
1
2
w2(t)
m2
setrvačná síla hmoty mi
m1w1°°
m1
m2w2°°
m2
pružné vratné síly
k11w1(t)
k12w1(t)
k21w1(t)
k22w1(t)

Ze součtových podmínek rovnováhy v bodech 1 a 2 dostaneme 2 pohybové rovnice:

$$m_1 \frac{d^2 w_1(t)}{dt^2} + k_{11} w_1(t) + k_{12} w_2(t) = 0$$
$$m_2 \frac{d^2 w_2(t)}{dt^2} + k_{21} w_1(t) + k_{22} w_2(t) = 0 \qquad (1)$$

Homogenní soustava simultánních diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty.

Řešení hledáme ve tvaru (1. partikulární řešení):

$$w_1(t) = w_{1(j)}^0 sin\omega_{(j)} t \qquad w_2(t) = w_{2(j)}^0 sin\omega_{(j)} t$$

Po dosazení a úpravě:

$$\left(k_{11} - \omega_{(j)}^2 m_1\right) w_{1(j)}^0 + k_{12} w_{2(j)}^0 = 0$$
$$k_{21} w_{1(j)}^0 + \left(k_{22} - \omega_{(j)} m_2\right) w_{2(j)}^0 = 0$$

<u>Triviální řešení</u> soustavy rovnic je $w_{1(j)}^0 = w_{2(j)}^0 = 0$ a odpovídá <u>klidu.</u>
<u>Netriviální řešení</u> je v případě, že determinant soustavy se rovná nule

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega_{(j)}^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_{(j)} m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Rozepíšeme determinant a dle Sarrusova pravidla a získáme sekulární rovnici 2.stupně pro $\omega_{(j)}$.

$$\omega_{(j)}^4 - \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)\omega_{(j)}^2 + \frac{k_{11}k_{22}}{m_1 m_2} - \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega_{(j),(2)} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}\right\}}\right]} \qquad (2)$$

2 kladné kořeny $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}$ jsou kruhové frekvence vlastního kmitání.

Platí $0 < \omega_{(1)} < \omega_{(2)}$

Vlastní frekvence jsou potom $\quad f_{(1)} = \frac{\omega_{(1)}}{2\pi} \qquad f_{(2)} = \frac{\omega_{(2)}}{2\pi}$

Ke každé vlastní frekvenci přísluší <u>tvar vlastního kmitání</u>.
Po dosazení $\omega_{(1)}$ do upravených pohybových rovnic

$$\left(k_{11} - \omega_{(1)}^2 m_1\right) w_{1(1)}^0 + k_{12} w_{2(1)}^0 = 0$$

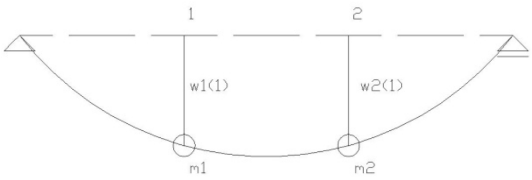
$$k_{21} w_{1(1)}^0 + \left(k_{22} - \omega_{(1)}^2 m_2\right) w_{2(1)}^0 = 0$$

Nelze vypočítat výchylky $w_{1(1)}^0, w_{2(1)}^0$, pouze jejich poměr

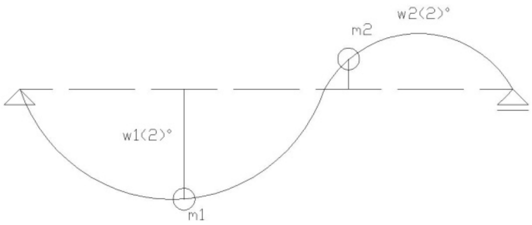
$$a_{(1)} = \frac{w_{2(1)}^0}{w_{1(1)}^0} = -\frac{k_{11} - m_1 \omega_{(1)}^2}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - m_2 \omega_{(1)}^2}$$

$$a_{(2)} = \frac{w_{2(2)}^0}{w_{1(2)}^0} = -\frac{k_{11} - m_1 \omega_{(2)}^2}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - m_2 \omega_{(2)}^2}$$

kde $a_{(1)}, a_{(2)}$ jsou tvarové součinitele.



1. tvar vlastního kmitání



2. tvar vlastního kmitání

<u>Obecné řešení rovnic</u> – podobně jako u soustavy a 1SV (stupněm volnosti)

$$w_1(t) = \left(A^0_{(1)} sin\omega_{(1)} t + B^0_{(1)} cos\omega_{(1)} t\right) w^0_{1(1)} + \left(A^0_{(2)} sin\omega_{(2)} t + B^0_{(2)} cos\omega_{(2)} t\right) w^0_{1(2)}$$
$$w_2(t) = \left(A^0_{(1)} sin\omega_{(1)} t + B^0_{(1)} cos\omega_{(1)} t\right) w^0_{2(1)} + \left(A^0_{(2)} sin\omega_{(2)} t + B^0_{(2)} cos\omega_{(2)} t\right) w^0_{2(2)} \quad (3)$$

kde $A^0_{i(j)}$, $B^0_{i(j)}$ (i=1,2; j=1,2) jsou <u>integrační konstanty</u>, které určíme z <u>počátečních podmínek</u>: např. počáteční výchylky a rychlosti 2 soustředěných hmot.

Rovnice (3) ve zkráceném tvaru:

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^{2} (A^0_{(j)} sin\omega_{(j)} t - B^0_{(j)} cos\omega_{(j)} t) w^0_{i(j)}$$

Potom např. <u>rychlost</u> volného kmitání

$$w^0_i(t) = \sum_{j=1}^{2} \omega_j (A^0_{(j)} cos\omega_{(j)} t - B^0_{(j)} sin\omega_{(j)} t) w^0_{i(j)}$$

<u>Zrychlení</u>

$$w^{00}_i(t) = \sum_{j=1}^{2} -\omega^2_{(j)} (A^0_{(j)} sin\omega_{(j)} t - B^0_{(j)} cos\omega_{(j)} t) w^0_{i(j)}$$

Soustavě diferenciálních rovnic 2. řádu vyhovuje i druhé partikulární řešení ve tvaru

$$w_1(t) = w^0_{1(j)} cos\omega_{(j)} t \qquad w_2(t) = w^0_{2(j)} cos\omega_{(j)} t$$