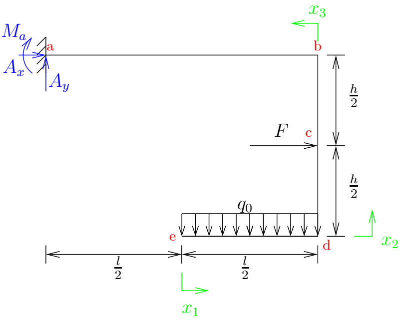
Vnitřní síly na lomených nosnících

Dan Kytýř, Tomáš Doktor, Petr Koudelka, Michaela Neuhäuserová, Marcel Adorna

18SAT - Statika

31. března 2018

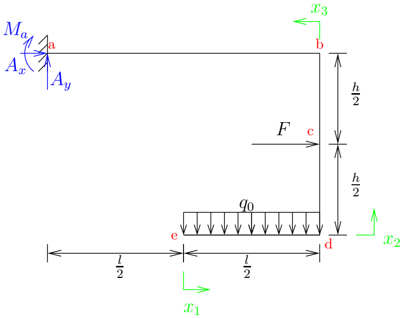
Zadání



Vyjádřete a vykreslete funkce průběhů vnitřních sil $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ na daném nosníku. Určete velikost a polohu maximálního ohybového momentu, je-li dáno:

$$\begin{aligned} F &= 4\,\mathrm{kN} \\ q_0 &= 2\,\mathrm{kN/m'} \\ l &= 6\,\mathrm{m} \\ h &= 4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

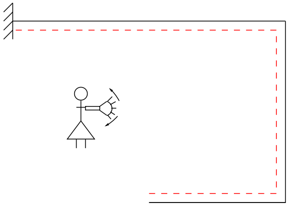
Výpočet reakcí



Zadaná soustava je staticky určitá, a proto je možné sestavit soustavu tří lineárně nezávislých rovnic odpovídajících podmínkám rovnováhy. Vzhledem k uložení vetknutím máme k dispozici dvě součtové a jednu momentovou podmínku rovnováhy, z nichž přímo určíme velikosti reakcí:

$$\begin{aligned}
\rightarrow x : A_x + F &= 0 \\
A_x &= -F \\
A_x &= -4\,\mathrm{kN} \\
\curvearrowleft a : -M_a - q_0 \frac{1}{2} l \frac{3}{4} l + F \frac{1}{2} h &= 0 \\
M_a &= F\frac{h}{2} - \frac{3}{8} q_0 l^2 \\
M_a &= 4\frac{4}{2} - \frac{3}{8} 2 \cdot 6^2 = -19\,\mathrm{kNm} \\
\uparrow y : A_y - q_0 \frac{1}{2} l &= 0 \\
A_y &= q_0 \frac{1}{2} l \\
A_y &= 2\frac{1}{2} 6 = 6\,\mathrm{kN}
\end{aligned}$$

Postup výpočtu

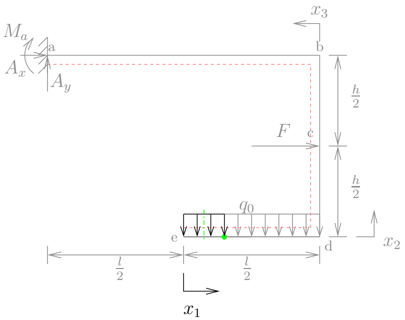


Na konstrukci vyznačíme tažená vlákna jako ekvidistantu střednice, přičemž dodržujeme pravidlo, že v uzlech (styčnících) nesmějí spodní vlákna přestoupit na opačnou stranu od střednice.
Dále vyznačíme body ohraničující jednotlivé intervaly. Narozdíl od přímých nosníků se tyto body nenacházejí pouze na místech změn vnějšího zatížení, příp. reakcí, ale rovněž v uzlech.
Dostáváme tak čtyři intervaly ohraničené pěti body:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{e;d}) &: x_1 && \in && \langle 0; \tfrac{1}{2} l) \\
\langle \overrightarrow{d;c}) &: x_2 && \in && \langle 0; \tfrac{1}{2} h) \\
\langle \overrightarrow{c;b}) &: x_2 && \in && \langle \tfrac{1}{2} h; h) \\
\langle \overrightarrow{b;a}) &: x_3 && \in && \langle 0; l)
\end{aligned}$$

Při výpočtu postupujeme, stejně jako u přímých nosníků, od volného konce směrem k vetknutí s tím, že podle polohy tažených vláken orientujeme konvenci kladného smyslu působení vnitřních sil.

Průběhy vnitřních sil v intervalu I



$$N_I(x_1) = 0$$

$$T_I(x_1) = -qx_1$$

$$M_I(x_1) = \frac{1}{2}q{x_1}^2$$

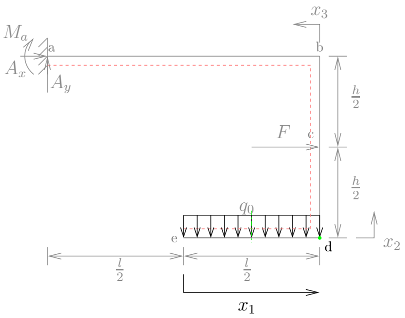
Pokud postupujeme po jednotlivých polích (intervalech, kde lze průběhy vnitřních sil popsat jednou funkcí), postup je stejný jako v případě přímých nosníků, navíc však musíme na začátku každého dalšího intervalu přenést hodnoty vnitřních sil z intervalu předchozího.

Začněme od volného konce: na nosníku od volného konce působí pouze spojité zatížení. Je konstantní, průběh posouvající síly tedy bude lineární a průběh ohybového momentu kvadratický.

Ve směru střednice žádné zatížení nepůsobí, v celém prvním intervalu bude proto normálová síla nulová.

Znaménka vnitřních sil vycházejí z polohy tažených vláken, která jsou na tomto intervalu na horní straně nosníku.

Hodnoty vnitřních sil v bodě d



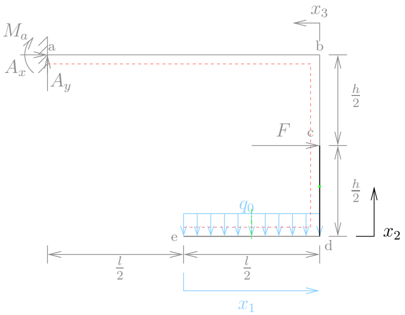
$$N_I(\tfrac{l}{2}) = 0$$

$$T_I(\tfrac{l}{2}) = -q\tfrac{l}{2} = -6\ \mathrm{kN}$$

$$M_I(\tfrac{l}{2}) = \tfrac{1}{2}q(\tfrac{l}{2})^2 = \tfrac{1}{8}ql^2 = 9\ \mathrm{kNm}$$

Interval *I* končí bodem *d*. Hodnoty vnitřních sil v tomto bodě nám poslouží k tomu, abychom je přenesli do průběhů v následujícím intervalu.
Hodnoty vnitřních sil v bodě *d* určíme dosazením délky *l* za souřadnici *x*1. Všimněme si rozdílu mezi **průběhy** funkcí na **intervalech** a **funkčními hodnotami** v **bodech**.

Průběhy vnitřních sil v intervalu II



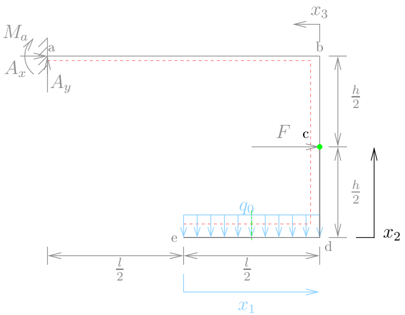
$$N_{II}(x_2) = \frac{1}{2}ql$$

$$T_{II}(x_2) = 0$$

$$M_{II}(x_2) = \frac{1}{8}ql^2$$

Funkce vnitřních sil na **intervalu** *II* se skládají z vnitřních sil vyvolaných zatížením na tomto poli a hodnot přenesených z předchozího intervalu. (Na intervalu *II* žádné zatížení nepůsobí, proto pouze přeneseme hodnoty, které jsme určili v bodě *d*.) Protože směr střednice se ve styčníku *d* mění z vodorovného na svislý, hodnoty normálové síly přispívají k průběhu posouvající síly a hodnoty posouvající síly přispívají k průběhu normálové síly.

Hodnoty vnitřních sil v bodě c



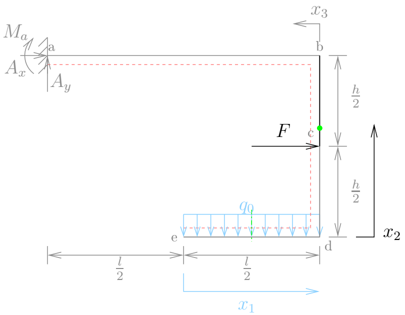
$$N_{II}(\tfrac{h}{2}) = \tfrac{1}{2}ql = 6 \text{ kN}$$

$$T_{II}(\tfrac{h}{2}) = 0$$

$$M_{II}(\tfrac{h}{2}) = \tfrac{1}{8}ql^2 = 9 \text{ kNm}$$

V **bodě** *c* určíme **hodnoty** vnitřních sil pomocí průběhů z končícího intervalu *II*.

Průběhy vnitřních sil v intervalu III



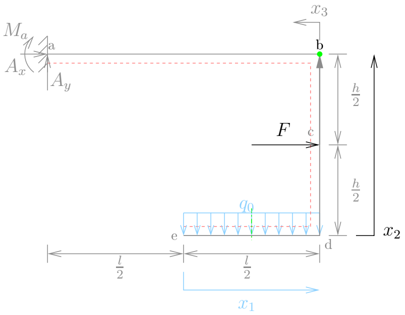
$$N_{III}(x_2) = \frac{1}{2}ql$$

$$T_{III}(x_2) = 0 - F$$

$$M_{III}(x_2) = \frac{1}{8}ql^2 + F(x_2 - \frac{h}{2})$$

K **průběhům** vnitřních sil v **intervalu** *III* přispívají hodnoty v bodě *c*. Protože se zde nemění směr střednice (zůstává svislá), hodnota normálové síly přispívá k průběhu normálové síly a hodnota posouvající síly přispívá k průběhu posouvající síly.

Hodnoty vnitřních sil v bodě b



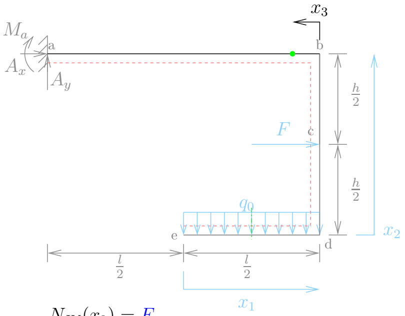
$$N_{III}(h) = \frac{1}{2}ql = 6 \text{ kN}$$

$$T_{III}(h) = 0 - F = -4 \text{ kN}$$

$$M_{III}(h) = \frac{1}{8}ql^2 + F\frac{h}{2} = 17 \text{ kNm}$$

V **bodě** *b* určíme **hodnoty** vnitřních sil pomocí průběhů z končícího intervalu *III*.

Průběhy vnitřních sil v intervalu IV



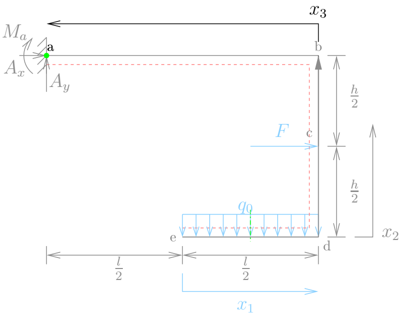
$$N_{IV}(x_3) = F$$

$$T_{IV}(x_3) = \frac{1}{2}ql$$

$$M_{IV}(x_3) = \frac{1}{8}ql^2 0 + F\frac{h}{2} - \frac{1}{2}qlx_3$$

Funkce vnitřních sil na **intervalu** *IV* se skládají z vnitřních sil vyvolaných zatížením na tomto poli a hodnot přenesených z předchozího intervalu.
Protože směr střednice se ve styčníku *b* mění ze svislého na vodorovný, hodnoty normálové síly přispívají k průběhu posouvající síly a hodnoty posouvající síly přispívají k průběhu normálové síly.
K průběhu ohybového momentu přispívá hodnota určená v bodě *b* a dále síla velikosti $\frac{1}{2}ql$ která se přenesla po svislé části konstrukce až ke styčníku *b* a od tohoto bodu působí kolmo ke střednici a způsobuje tedy ohybový moment.

Hodnoty vnitřních sil v bodě a



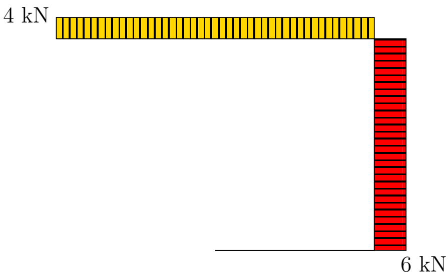
V **bodě** *a* určíme **hodnoty** vnitřních sil pomocí průběhů z končícího intervalu *IV*. Tyto hodnoty odpovídají reakcím ve vetknutí.

$$N_{IV}(l) = F = 4 \text{ kN}$$

$$T_{III}(l) = \frac{1}{2}ql = 6 \text{ kN}$$

$$M_{III}(l) = \frac{1}{8}ql^2 + F\frac{h}{2} - \frac{1}{2}ql^2 = \frac{1}{2}Fh - \frac{3}{8}ql^2 = -19 \text{ kNm}$$

Průběhy normálových sil $N(x)$

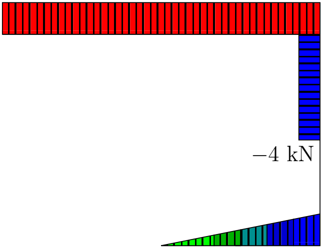


Při výpočtu postupujeme tak, že posunujeme polohu řezu $x_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ na nosníku od volného konce a určujeme průběh vnitřních sil na konstrukci. Přitom správně orientujeme konvenci kladného smyslu působení vnitřních sil podle polohy spodních vláken a uvažujeme pouze zatížení působící rovnoběžně se střednicí.
Pro jednotlivé intervaly potom dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{e; d}) : N_{\mathrm{I}}(x_1) &= 0 \\
\langle \overrightarrow{d; c}) : N_{\mathrm{II}}(x_2) &= q_0 \frac{1}{2} l \\
\langle \overrightarrow{c; b}) : N_{\mathrm{III}}(x_2) &= q_0 \frac{1}{2} l \\
\langle \overrightarrow{b; a}) : N_{\mathrm{IV}}(x_3) &= F
\end{aligned}
$$

V uzlech si povšimneme transformace typu vnitřních sil v závislosti na působení vnějšího zatížení (normálové síly se stávají posouvajícími a naopak).

Průběhy posouvajících sil $T(x)$

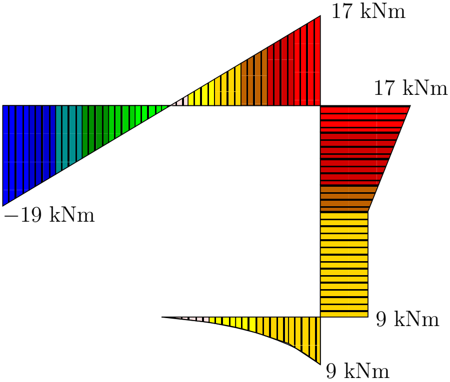


Stejně jako při výpočtu normálových sil posunujeme polohu řezu $x_{\mathrm{i}}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ na nosníku od volného konce a určujeme průběh vnitřních sil na konstrukci. Přitom správně orientujeme konvenci kladného smyslu působení vnitřních sil podle polohy spodních vláken a uvažujeme pouze zatížení působící kolmo na střednici.
Pro jednotlivé intervaly potom dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{e; d}) : T_{\mathrm{I}}(x_1) &= -q_0 x_1 \\
\langle \overrightarrow{d; c}) : T_{\mathrm{II}}(x_2) &= 0 \\
\langle \overrightarrow{c; b}) : T_{\mathrm{III}}(x_2) &= -F \\
\langle \overrightarrow{b; a}) : T_{\mathrm{IV}}(x_3) &= q_0 \frac{1}{2} l
\end{aligned}
$$

V uzlech opět můžeme pozorovat transformaci typu vnitřních sil v závislosti na působení vnějšího zatížení (normálové síly se stávají posouvajícími a naopak).

Průběhy ohybových momentů $M(x)$

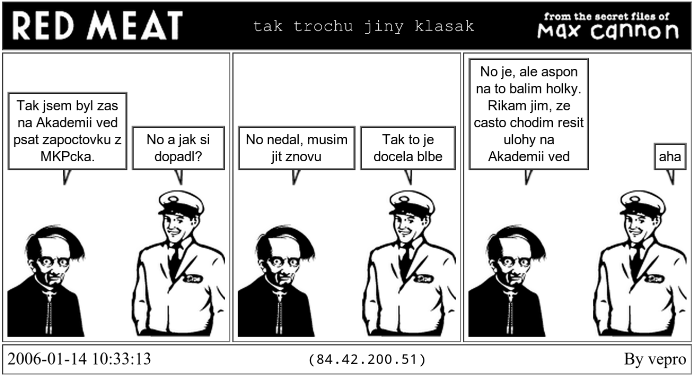


Výpočet průběhu ohybových momentů se řídí stejnými pravidly jako výpočet normálových, resp. posouvajících sil s tím rozdílem, že v uzlech nedochází k transformacím. Platí, že ohybový moment se přenáší přes uzel, a proto je velikost ohybového momentu na začátku daného intervalu rovna velikosti ohybového momentu na konci předchozího intervalu, tedy:

$$\forall \{i, j\} \in \mathbb{N}^0,\ M_\mathrm{j}\left(x_{\mathrm{j,min}}\right) \equiv M_\mathrm{i}\left(x_{\mathrm{i,max}}\right),\ j = i + 1$$

Pro jednotlivé intervaly potom dostaneme:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{e;d} \rangle : M_\mathrm{I}(x_1) &= \frac{1}{2} q_0 x_1^2 \\
\langle \overrightarrow{d;c} \rangle : M_\mathrm{II}(x_2) &= \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} q_0 l^2 \\
\langle \overrightarrow{c;b} \rangle : M_\mathrm{III}(x_2) &= \frac{1}{8} q_0 l^2 + F x_2 \\
\langle \overrightarrow{b;a} \rangle : M_\mathrm{IV}(x_3) &= \frac{1}{8} q_0 l^2 + F \frac{1}{2} h - q_0 \frac{1}{2} l x_3
\end{aligned}$$



{kytyr, xdoktor, xpkoudelka}@fd.cvut.cz