

Metoda konečných prvků
–poznámky k přednáškám–

Ondřej Jiroušek

13. února 2006

Obsah

1 Úvod	7
1.1 Rozdělení teoretické mechaniky	8
1.2 Základní myšlenka MKP	8
1.3 Velmi stručná historie MKP	9
2 Opakování maticové algebry	11
2.1 Rovnost matic	12
2.2 Sčítání a odečítání matic	12
2.3 Násobení skalárem	12
2.4 Násobení matice maticí	12
2.5 Transpozice matice	12
2.6 Symetrické matice	12
2.7 Nulová matice	13
2.8 Jednotková matice	13
2.9 Diagonální matice	13
2.10 Determinant matice	13
2.11 Singulární matice	13
2.12 Pozitivně definitní matice	14
2.13 Inverzní matice	14
2.14 Derivace a integrace matice	14
3 Řešení soustav lineárních algebraických rovnic	15
3.1 Přímé metody	15
3.1.1 Gaussova eliminační metoda	15
3.1.2 Řešení pomocí LU rozkladu	16
3.1.3 GEM pomocí LDL^T rozkladu	18
3.2 Iterační metody	20
3.2.1 Jacobiho iterační metoda	21
3.2.2 Gaussova-Seidelova iterační metoda	23

3.2.3 Jacobiho metoda s relaxací	24
3.2.4 Gaussova-Seidelova relaxační metoda (SOR)	24
3.3 Stabilita a citlivost	25
3.3.1 Stabilita	25
3.3.2 Citlivost	25
4 Základní princip metody konečných prvků	27
5 Přímá metoda tuhosti (DIRECT STIFFNESS METHOD)	29
5.1 Globální soustava rovnic (MASTER STIFFNESS EQUATION)	31
5.2 Určení matice tuhosti prvku	31
5.2.1 Poznámky k odvození matice tuhosti taženého-tlačeného prvku	33
5.3 Transformace souřadnic	34
5.4 Globalizace	34
5.5 Sestavení globální matice tuhosti	35
5.6 Řešení (SOLUTION)	37
5.6.1 Aplikace okrajových podmínek redukcí	37
5.6.2 Aplikace okrajových podmínek modifikací	39
5.6.3 Aplikace okrajových podmínek v maticové podobě	39
5.7 Výpočet vnitřních sil (odvozených veličin) (POST PROCESSING)	40
5.8 Implementace taženého-tlačeného prvku v Octave	40
5.8.1 Matice tuhosti elementu	41
6 Variační principy	45
6.1 Funkcionál celkové potenciální energie	46
6.1.1 Vnitřní (deformační) energie při tahu tlaku	46
6.1.2 Vnitřní (deformační) energie při ohybu	47
6.1.3 Vnitřní (deformační) energie při kroucení	47
6.1.4 Vnější energie	48
6.1.5 Celková potenciální energie prutu	48
6.2 Lagrangeův a Castiglianův variační princip	48
6.3 Ritzova metoda	49
6.4 Princip virtuálních prací	51
7 Tažený-tlačený prut	53
7.1 Variační formulace I (x)	53
7.2 Variační formulace II (ξ)	55

8 Ohýbaný prut (PLANE BEAM ELEMENT)	57
8.1 Ohýbaný prut (Euler–Bernoulli)	58
8.2 Ohýbaný prut s vlivem smyku (Timošenko)	66
8.3 Ohýbaný prut na pružném podloží (Timošenko–Winkler)	68
8.4 Ohýbaný prut – vliv normálové síly	69
9 Izoparametrické elementy	71
9.1 Přirozené souřadnice	71
9.1.1 Přirozené souřadnice pro 1-D elementy	72
9.1.2 Trojúhelníkové souřadnice	73
9.1.3 Přirozené souřadnice pro čtyřstěn	77
9.2 Trojúhelníkový prvek s konstantní deformací (CST)	78
9.3 Podstata izoparametrických prvků	81
9.3.1 Souhrn básových funkcí pro nejběžnější rovinné prvky	86
9.3.1.1 Constant Strain Triangle (CST, T3)	86
9.3.1.2 Linear Strain Element (LST, T6)	86
9.3.1.3 Linear Quadrilateral Element (Q4)	86
9.3.1.4 Quadratic Quadrilateral Element (Q8)	88
10 Prvky pro rovinnou úlohu	89
10.1 Základní úlohy teorie pružnosti	89
10.2 Úlohy rovinné pružnosti	92
10.2.1 Rovinná deformace	93
10.2.2 Rovinná napjatost	94
10.2.3 Osová souměrnost	95
10.2.4 Prvek pro rovinnou deformaci	96
10.2.5 Prvek pro rovinnou napjatost	98
10.2.6 Statické podmínky rovnováhy (Cauchyho rovnice)	98
10.2.7 Okrajové podmínky	98
10.2.8 Odvození matice tuhosti pro CST-prvek a rovinnou úlohu	99
11 Deskové prvky	101
11.1 Předpoklady, deskové teorie	101
11.2 Kirchhoffova teorie tenkých desek	101
11.2.1 Kinematické rovnice	102
11.2.2 Geometrické rovnice	102
11.2.3 Statické rovnice	103
11.2.4 Biharmonická rovnice desky	104

11.2.5 Funkcionál potenciální energie	105
11.2.6 Hellinger-Reissnerův princip	105
11.2.7 Výpočet matice tuhosti (doplnit později)	105
11.3 Mindlinova teorie tlustých desek	107
12 Úvod do dynamiky v MKP	109
12.1 Variační princip v dynamice - Hamiltonův princip	109
12.2 Matice hmotnosti	111
12.2.1 Globalizace matice hmotnosti	113
12.3 Vlastní kmitání s více stupni volnosti	114
12.3.1 Metoda konstant tuhosti	114
12.3.2 Příklad (metoda konstant tuhosti)	117
12.4 Řešení kmitání pomocí MKP	118
12.5 Vlastnosti vlastních tvarů	119
12.5.1 Ortogonalita vlastních tvarů	119
12.6 Tlumené kmitání	121
12.7 Řešení vlastního kmitání	121
12.7.1 Stodolova iterační metoda	122
12.7.2 Inverzní iterace	123
12.7.3 Metoda iterace podprostoru	123
13 Řešení úloh nelineární mechaniky	125
13.1 Přístupy k řešení nelineárních problémů	125
13.2 Inkrementální technika	126
13.3 Iterační (Newtonovy) techniky	128
13.4 Smíšené techniky (STEP-ITERATIVE OR MIXED)	128
14 Numerická integrace	131
14.1 Rovnoměrné dělení (Newton-Cotesovo schéma)	131
14.2 Nerovnoměrné dělení (Gaussova integrační formule)	132

Kapitola 1

Úvod

Tento materiál vznikl z přednášek pro posluchače kurzu “Metoda konečných prvků” na Fakultě dopravní, ČVUT v Praze. Cílem tohoto kurzu je seznámit studenty se základními myšlenkami metody konečných prvků, především v oblasti teoretické pružnosti a dynamiky konstrukcí. Protože je kurz určen pro posluchače třetího až pátého ročníku bakalářského i magisterského studia, bylo nutno kurz doplnit i o několik kapitol, patřících do jiných teoretických předmětů. Postupně tak do tohoto materiálu přibýly stručné kapitoly se základy maticové algebry, kapitola pojednávající o metodách řešení soustav lineárních algebraických rovnic i kapitola o numerické integraci. Tyto kapitoly, patřící do kurzů numerické analýzy, nejsou běžně přednášeny na FD ČVUT.

Skriptu postupně vznikala tak, aby na čtenáře kladla pouze minimální znalosti z teorie pružnosti, či matematické analýzy. V průběhu semestru byly doplňovány partie, které nebyly známé všem posluchačům kurzu. Postupně tak vznikly úvodní partie, které opakují nejdůležitější pojmy z teorie pružnosti, nebo dynamiky konstrukcí.

Metoda konečných prvků je ve popsána nejprve pomocí přímé metody tuhosti, která je uvedena pro nejjednodušší typ namáhání a nejjednodušší prvek, tedy pro případ tahu (tlaku) a prutový prvek. Na tomto případě jsou uvedeny postupy používané ve všech ostatních případech namáhání, jako je transformace souřadnic, globalizace a výpočet odvozených (sekundárních) veličin. Je zde také uvedena implementace taženého (tlačného) prvku v Octave (Matlabu).

V následující kapitole jsou uvedeny základní myšlenky variačního počtu, uveden Lagrangeův a Castiglianův variační princip a jednoduše popsána Ritzova metoda. Její použití je zdokumentováno na příkladu nalezení rovnice ohybové čáry jednoduché staticky určité konstrukce. Je zde rovněž uvedeno odvození matice tuhosti taženého (tlačného) prutu pomocí principu virtuální práce (PVP).

Protože matice tuhosti taženého (tlačného prvku) byla odvozena pomocí PVP již v kapitole variačního počtu, je další kapitola rovnou věnována ohýbanému prvku. Je zde provedeno odvození báзовých funkcí, matice tuhosti prvku je zde již odvozena pomocí energetického principu.

Další kapitola se zabývá izoparametrickými elementy, jejich podstatou. Je zde provedeno odvození trojúhelníkových souřadnic, dále přirozených souřadnic například pro čtyřstěn. Podrobněji jsou zde vysvětleny izoparametrické prvky. Aplikace báзовých funkcí izoparametrických elementů pro odvození matice tuhosti trojúhelníkového prvku s konstantní deformací je uvedeno v závěru této kapitoly.

V následující kapitole jsou probány základní úlohy teorie pružnosti a na příkladu rovinných případů pružnosti, tedy rovinné deformace a rovinné napjatosti odvozeny matice

tuhosti elementů pro tyto dvě základní úlohy matematické pružnosti. V závěru kapitoly je provedeno stručné shrnutí další rovinné elementů, elementy vyššího řádu.

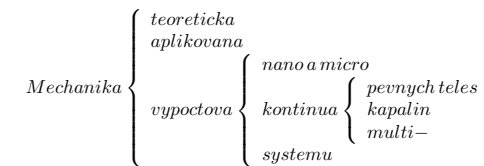
Kapitola 12 se věnuje MKP v dynamice konstrukcí. Úvodem jsou zopakovány základní pojmy volného i vynuceného, netlumeného i tlumeného kmitání. Úvod do kmitání soustav s více stupni volnosti je vysvětlen pomocí metody konstant tuhosti, je zde vysvětlena i Stodolova iterační metoda. Je zde provedeno odvození matice hmotnosti elementu. Základní vztahy pro MKP jsou dále odvozeny pomocí Hamiltonova variačního principu. Metody pro řešení vlastního kmitání, jako jsou Rayleigh-Ritzova metoda, metoda statické kondenzace, nebo iterační metody jsou provedeny pouze stručně. Řešení vynuceného kmitání je uvedeno pouze pomocí rozvoje do vlastních tvarů.

Kapitola 13 pojednává stručně o metodách řešení nelineárních problémů. Inkrementální i iterační techniky jsou nastíněny pouze v hlavních myšlenkách, smíšené metody dokonce jen informativně.

Poslední kapitola je věnována numerické integraci. Je zde provedeno poměrně detailně odvození Newton-Cotesových vzorců a Gaussovy integrační fomruly.

1.1 Rozdělení teoretické mechaniky

Mechanika jako součást fyziky může být rozdělena do tří částí: teoretická mechanika, aplikovaná a výpočtová. My se samozřejmě budeme zabývat tou poslední. Výpočtovou mechaniku lze ovšem i dále dělit, např. na nanomechaniku, mikromechaniku, mezo-mechaniku, mechaniku pevných těles, kapalin... My se zaměříme pouze na mechaniku pevných těles.



Mechanika je v základním kurzu dělena na dvě části, na statiku a dynamiku. Dynamika na rozdíl od statiky zkoumá vliv setrvačných sil. Vlastnosti zkoumaného systému mohou být i ve staticce časově závislé, setrvačné síly se však zanedbávají. Statické problémy mohou být skritně statické, nebo kvazistatické. Při kvazistatické analýze je třeba počítat s časem, např. v problémech jako je únavaová analýza (cyklování materiálu), sedání základů, plasticita závislá na rychlosti deformace. Čas v těchto příkladech však je třeba uvažovat pouze jako relativní parametr. Z oblasti dynamiky se budeme zabývat pouze vlastním i vynuceným kmitáním konstrukcí, odezvou konstrukce na harmonické buzení a stanovováním vlastních frekvencí a módů kmitání.

Dalším měřítkem, jak mechaniku dělit je na lineární a nelineární. Zdrojů nelinearit je více, nelinearita může být materiálová, nebo geometrická. Budeme se zabývat problémy nelineární mechaniky, odlišnostmi řešení, nelineárními materiálovými modely i matematickými metodami řešení soustav rovnic.

1.2 Základní myšlenka MKP

Ve stručnosti, základní myšlenkou metody konečných prvků je reprezentace konstrukce pomocí jednoduchých částí, tzv. elementů. Tyto elementy jsou navzájem spojené v tzv.

uzlových bodech. Jednoduché funkce jsou voleny k aproximaci hledané veličiny, v tomto textu nejčastěji posunutí, po jednotlivých prvcích. Řešením konstrukce pomocí MKP jsou v tomto případě hodnoty uzlových posunutí, tedy posunutí v konečném počtu uzlových bodů. Jednoduché funkce jsou voleny tak, aby vhodným způsobem aproximovaly posunutí po prvku, nejčastěji to bývají polynomy n -tého stupně, mohou to však být i například trigonometrické funkce.

Variační principy mechaniky, např. princip minima potenciální energie, jsou používány k řešení podmínek rovnováhy na každém prvku. Například pro případ elastického materiálu, potenciální energie je dána součtem vnitřní deformační energie (práce vnitřních sil na deformaci) a potenciální energie vnějších sil, tedy zatížení. Jestliže má být konstrukce v rovnováze, tato potenciální energie musí nabývat minimální hodnoty.

Z tohoto stručného popisu plynou základní požadavky kladené na čtenáře. Ačkoliv všechna témata jsou v tomto textu pokryta, většinou se jedná o poměrně stručný výklad a proto se doporučuje, aby čtenář byl seznámen alespoň v minimálním rozsahu s následujícími tématy:

- základy matematické teorie pružnosti
- variační principy mechaniky
- maticová algebra
- řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- numerická integrace

Algoritmizace některých základních postupů metody konečných prvků je v textu nastíněna pomocí některého z vyšších programovacích jazyků. Ačkoliv stále ještě mnoho vědeckého kódu je psáno ve Fortranu, současný trend je používat vyšší programovací jazyky. V projektech s otevřeným zdrojovým kódem je nejčastěji používaným jazykem (2005) jazyk C, následuje perl, C+, java, PHP. K výukovým účelům je dokonce vhodnější používat jazyky jako Matlab, Maple, či Mathematicu. V textu je užito open-sourcové ekvivalenty Matlabu, systému octave (<http://www.octave.org>); pro nastínění možnosti použití systému pro symbolickou algebru systém macsyms (<http://macsyms.something.org>).

1.3 Velmi stručná historie MKP

Obvyklá otázka zní: kdo vymyslel metodu konečných prvků? Na to není úplně jednoduchá odpověď. Často se uvádí jako první R. Courant, který poprvé užil myšlenku “po částech spojitých polí”. Raději se vyhněme diskuzi o “objeviteli” MKP a shrňme alespoň některé nejvýznamější milníky v éře MKP:

- 1943 Courant (zavedení “po částech spojitých polí”)
- 1956 Turner, Clough, Martin a Topp
- 1960 Clough (poprvé použil pojmu “konečný element”, rovinné problémy)
- 70-léta aplikace na sálových počítačích
- 80-léta mikropočítače, PC, pre- a post- procesory, význam komerčních MKP systémů roste

- 90-léta analýzy velmi velkých strukturálních problémů, aplikace v letectví, kosmonautice

M. J. Turner formuloval přímou metodu tuhosti (DSM, Direct Stiffness Method) v období mezi roky 1950 a 1962. Díky jemu začala jako první v praxi používat DSM firma Boeing, zatímco ostatní letecké společnosti stále ještě používaly pro problémy aeroelasticity silovou metodu. Zavedení izoparametrických modelů, tvarových funkcí a tzv. patch testu je přičítáno B. M. Ironsovi. Dalším průkopníkem na poli MKP byl R. J. Melosh, který popsal spojitost s Ritzovou metodou a systematizoval variační způsob odvození matice tuhosti elementu. Konečně E. L. Wilson vyvinul první “open source” konečnoprvkový systém.

Jako skutečný začátek éry MKP je považováno publikování článku “Stiffness and deflection analysis of complex atructures, *J. Aero Sci.*, 1956” v roce 1956 (Turner, Clough, Martin a Topp) i když pojmu “konečný element” užil poprvé až R. W. Clough v roce 1960 v článku, kde použil MKP pro řešení rovinného problému.

.....

Kapitola 2

Opakování maticové algebry

Soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

s neznámými x_i budeme zapisovat ve formě:

$$Ax = B \quad (2.2)$$

kde

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$x = \{x_i\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$b = \{b_i\} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

A se nazývá maticí soustavy (čtvercová velikosti $n \times n$), **x** a **b** jsou (sloupcové) vektory, **b** je tzv. vektor pravých stran a **x** obsahuje neznámé.

2.1 Rovnost matic

Matice **A** a **B** stejných rozměrů $m \times n$ jsou si sobě rovny, jestliže všechny jejich členy jsou si rovny, t.j. $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna i, j .

2.2 Sčítání a odečítání matic

Sčítání a odečítání je definováno pouze pro matice stejných rozměrů a to následovně:

$$\begin{aligned} C &= A + B \quad \dots \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ D &= A - B \quad \dots \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3 Násobení skalárem

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \quad (2.7)$$

2.4 Násobení matice maticí

Pro matice **A** ($m \times n$) a **B** ($n \times p$) je definován součin **AB** následovně:

$$C = AB \quad \dots \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (2.8)$$

kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, p$. Nezapomínejme, že obecně $AB \neq BA$ ale $(AB)C = A(BC)$, tj. násobení matic je *asociativní*.

2.5 Transpozice matice

Transpozice matice $A = [a_{ij}]$ je dána následovně:

$$A^T = [a_{ji}] \quad (2.9)$$

připomeňme, že platí: $(AB)^T = B^T A^T$.

2.6 Symetrické matice

Matice je nazývá *symetrická*, jestliže platí: $A^T = A$ nebo $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechna i, j .

2.7 Nulová matice

Nulovou matici budeme značit 0 . Může být jakéhokoliv rozměru, např. nulová matice rozměru 2×3

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.8 Jednotková matice

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Všimněme si, že platí: $AI = A$, $Ix = x$.

2.9 Diagonální matice

Je taková matice, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále. Např.:

$$D = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Takovouto matici budeme zapisovat zkráceným zápisem $D = \text{diag}[11, -3, 0, 17]$.

2.10 Determinant matice

Determinant čtvercové matice A je skalární číslo, označované $\det A$ nebo $|A|$. Výpočet determinantu matice 2×2 , nebo 3×3 je triviální, použijeme tzv. *Sarrusovo pravidlo*:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.12)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (2.13)$$

2.11 Singulární matice

Čtvercová matice A je singulární, jestliže její determinant je roven nule $\det A = 0$, což znamená, že soustava rovnic nemá jedno jediné řešení. (Soustava rovnic má právě jedno řešení právě tehdy, když $\det A \neq 0$.)

2.12 Pozitivně definitní matice

čtvercová matice A ($n \times n$) se nazývá *pozitivně definitní* jestliže pro každý nenulový vektor x rozměru n platí:

$$x^T A x > 0$$

Pozitivně definitní matice není singulární.

2.13 Inverzní matice

Pro čtvercovou a regulární matici A ($\det A \neq 0$) je inverzní matice A^{-1} vytvořena tak, že platí:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (2.14)$$

Matice adjungovaná k matici A je definována jako $\text{Adj} A = C_{ij}^T$, kde C :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (2.15)$$

kde M_{ij} je determinant redukované matice získané eliminací i -tého řádku a j -tého sloupce matice A . Pomocí adjungované matice sematice inverzní dá vypočítat následovně:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A \quad (2.16)$$

Dá se snadno ukázat, že $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Jestliže matice soustavy lineárních algebraických rovnic 2.1 A je regulární, řešení této soustavy se dá vyjádřit jako:

$$x = A^{-1}b \quad (2.17)$$

tudíž hlavním úkolem při hledání řešení soustavy je nalezení inverzní matice soustavy A^{-1} .

2.14 Derivace a integrace matice

Mějme $A(t) = [a_{ij}(t)]$. Potom derivaci matice A podle časové proměnné t rozumíme:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] \quad (2.18)$$

a její integraci:

$$\int A(t) dt = \left[\int a_{ij}(t) dt \right] \quad (2.19)$$

Kapitola 3

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

V tomto odstavci se omezíme pouze na soustavy lineárních algebraických rovnic, ve kterých bude matice A čtvercová a regulární, řádu n :

$$Ax = b \quad (3.1)$$

Matice A je regulární právě tehdy, když $\det A \neq 0$ a rovnice 3.1 má pak právě jedno řešení. Metody pro řešení rovnice 3.1 můžeme rozdělit do dvou skupin:

- **Přímé metody:** tyto metody poskytují *přesné* řešení rovnice 3.1 a to v konečném počtu kroků. Patří sem Gaussova eliminační metoda a metody využívající *LU* rozkladu matice A .
- **Iterační metody:** řešení je dosaženo pomocí série iterací, tedy výpočetních kroků, kterými se přibližujeme k přesnému řešení. Výsledný vektor x je tedy pouze přibližný. Zmíníme se stručně o Jacobiho metodě a Gauss-Seidelově metodě.

Obecně může být těžké říct, která z metod bude nejuvhodnější pro řešení dané soustavy rovnic, iteční metody budou vhodnější v případě, že matice A je řídká, nebo dokonce výrazně pásová. Matice tuhosti celého problému sestavená při řešení úloh pomocí metody konečných prvků je obvykle výrazně pásová, proto mají iterační metody v MKP velký význam. Přímé metody nelze rovněž někdy použít z důvodu rozsáhlosti dané úlohy, kdy se matice nevejde do operační paměti počítače.

3.1 Přímé metody

3.1.1 Gaussova eliminační metoda

Tato metoda je obecně známá a navíc není problém si ji odvodit. Rovnici 3.1 rozepte pomocí jednotlivých členů:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nyní eliminujeme prvky pod hlavní diagonálou tak, aby nám na posledním řádku vyšla jedna rovnice o jedné neznámé, např. ve tvaru $a_{nn}x_n = \xi b_{nn}$. Prvním krokem bude eliminace první neznámé x_1 ze všech ostatních rovnic. První rovnici vynásobenou členem $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ přičteme k druhému řádku, první rovnici vynásobenou členem $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ přičteme k třetímu řádku a tak dále postupně k poslední rovnici ($n - 1$ operací):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Postupně eliminujeme další řádky. Členy, kterými pokaždé násobíme jednotlivé rovnice, budeme nazývat *multiplikátory* a obecně v k -tém kroku budeme k -tý řádek soustavy násobit multiplikátorem

$$m_{ik}^{k-1} = -\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \quad (3.4)$$

a tím nulovat prvky v k -tém sloupci. Po $n - 1$ krocích eliminujeme původní soustavu na soustavu s horní trojúhelníkovou maticí:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Z posledního řádku je zřejmé

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (3.6)$$

Ostatní neznámé x_i získáme zpětnou substitucí v pořadí $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

Algoritmus Gaussovy eliminační metody je možno snadno zapsat např. takto (bez testu možnosti dělení, tedy $a_{kk}^{k-1} \neq 0$):

```

pro k = 1, 2, ..., n - 1
  pro i = k + 1, k + 2, ..., n
    mik = -aikk-1 / akkk-1
    pro j = k + 1, k + 2, ..., n + 1
      aijk = aijk-1 + mikk-1 akjk-1
    konec j
  konec i
konec k

```

3.1.2 Řešení pomocí LU rozkladu

Při řešení soustavy rovnic pomocí GEM se vlastně matice A převedla na tzv. *horní trojúhelníkovou matici*, tedy matici, její členy pod hlavní diagonálou jsou nulové. Podívejme se tedy podrobněji na rozklad matice A pomocí trojúhelníkové matice. Předpokládejme, že tento rozklad existuje a že tedy matici A můžeme zapsat ve tvaru:

$$A = L \cdot U \quad (3.7)$$

kde L je dolní trojúhelníková matice a U je horní trojúhelníková matice (Upper a Lower). To znamená (pro jednoduchost předpokládejme nyní matice 4×4):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Požijme tohoto rozkladu pro řešení rovnice 3.1:

$$Ax = (L \cdot U) \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b \quad (3.9)$$

substitucí

$$L \cdot y = b \quad (3.10)$$

a následným řešením

$$U \cdot x = y \quad (3.11)$$

Výhodou tohoto postupu samozřejmě je, že řešení soustavy rovnic s horní trojúhelníkovou maticí je triviální (pouze zpětná substituce). Pro řešení rovnice 3.11 použijeme tedy zpětnou substituci:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \quad (3.12)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} x_j \right] \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (3.13)$$

pro řešení rovnice 3.10 dopřednou substitucí:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad (3.14)$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right] \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (3.15)$$

Metod na určení LU rozkladu matice A je více a navíc LU rozklad matice není určen jednoznačně. Například pro matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ lze snadno najít ekvivalentní LU rozklady ve tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Nejednoznačnost LU rozkladu je zřejmá již z toho, že soustava

$$LU = A$$

obsahuje n^2 rovnic, ale je potřeba určit $n(n+1)$ neznámých l_{ij} a u_{ij} . Lze tedy volně volit n neznámých. Obvykle se jako volí diagonální prvky matice L a to jako jednotkové, tedy

$$l_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Jedním z nejčastěji používaných algoritmů pro nalezení LU rozkladu matice A je *Choleského algoritmus* pro symetrické pozitivně definitní matice. Je-li matice A pozitivně definitní, dá se ukázat, že existuje horní trojúhelníková matice U , která má na diagonále pouze kladné prvky tak, že platí

$$A = U^T U \quad (3.16)$$

Choleského algoritmus se pak dá zapsat takto:

$$\begin{array}{l} \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ u_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{r=1}^{j-1} u_{jr}^2} \\ \text{pro } i = j+1, j+2, \dots, n \\ u_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} u_{is} u_{js} \right) \\ \text{konec } i \\ \text{konec } j \end{array}$$

Závěrem ještě poznamenejme, že uvedený LU rozklad je ekvivalentní s Gaussovou eliminační metodou a proto je existuje LU rozklad matice A právě tehdy, když je možné aplikovat Gaussovou eliminační metodu. Řešení soustavy $Ax = b$ pomocí LU rozkladu je výhodné zejména tehdy, když vektor b je vícenásobný, tedy máme řešit soustavu rovnic, kde je více pravých stran. V MKP tato situace nastává poměrně často, vektor b reprezentuje vektor zatížení, tedy je možné snadno řešit příklady s několika zatěžovacími stavy.

3.1.3 GEM pomocí LDL^T rozkladu

Jak již bylo řečeno, metoda konečných prvků vede na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Matice A bude obvykle symetrická, pozitivně definitní matice. Pro symetrické matice se GEM obvykle modifikuje a řešení soustavy $Ax = b$ se pak nazývá řešení Gaussovou eliminační metodou s použitím LDL^T rozkladu (horní trojúhelníková matice je v případě symetrie transponovanou dolní trojúhelníkovou maticí, tedy $U = L^T$). Podívejme se na řešení soustavy rovnic GEM pomocí LDL^T rozkladu trochu podrobněji.

Předpokládejme tedy, že máme soustavu lineárních algebraických rovnic se symetrickou maticí A ve tvaru:

$$Ax = b \quad (3.17)$$

v metodě konečných prvků bude tato soustava reprezentovat známou rovnici $Kr = f$, matice A tedy bude mít význam matice tuhosti konstrukce K a vektor pravé strany b bude reprezentovat vektor transformovaného zatížení f .

Řešení soustavy rovnic 3.17 budeme hledat pomocí LDL^T rozkladu matice A , tedy rozkladu na dolní trojúhelníkovou maticí L , diagonální maticí D a horní trojúhelníkovou maticí $U = L^T$. V maticí L^T budou pod diagonálou pouze nulové prvky, výsledné řešení bude jednoduché provést "odspodu", neboť poslední řádek je vlastně jedna rovnice pro jednu neznámou. Ostatní neznámé získáme zpětným dosazením do zbývajících rovnic, neboť postupně v každé rovnici se bude vyskytovat jen jediná neznámá.

Hledejme tedy rozklad matice A pomocí posloupnosti následujících transformací:

$$L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1} A = U \quad (3.18)$$

kde U je horní trojúhelníková matice ve tvaru:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & & \\ & & -l_{i+2,i} & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & -l_{n,i} & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

v tomto zápisu se prvky matice U nazývají Gaussovy násobitele (potřebné pro nulování všech sloupců pod hlavní diagonálou) a z úvahy nulové hodnotě prvků pod diagonálou ve výsledné matici lze psát:

$$l_{i+j,j} = \frac{a_{i+j,i}}{a_{ii}} \quad (3.20)$$

Máme-li horní trojúhelníkovou matici U , pro výraz 3.18 potřebujeme její inverzi. Uvědomíme-li si, že matice L je dolní trojúhelníková, její inverzi získáme pouhou změnou znaménka, tedy vynásobením všech poddiagonálních prvků -1 . Výraz 3.18 lze tedy snadno přepsat a pro rozklad matice tuhosti získáme jednoduchý výraz:

$$A = L_1 L_2 \dots L_{n-1} U = LU \quad (3.21)$$

Horní trojúhelníkovou matici U můžeme snadno rozložit na součin diagonální matice D a horní trojúhelníkové, která bude mít na diagonále samé jedničky, označme ji \bar{U} :

$$U = D\bar{U} \quad (3.22)$$

Pro jistotu matice ještě rozeptejeme:

$$D = \begin{bmatrix} U_{11} & & & & \\ & U_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & U_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & L_{1,2} & L_{1,3} & \dots & L_{1,n} \\ & 1 & L_{2,3} & \dots & L_{2,n} \\ & & \dots & L_{i,j} & L_{i,n} \\ & & & \dots & L_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Dosadíme-li rozklad $U = D\bar{U}$ do 3.21, získáme:

$$A = LU = LD\bar{U} \quad (3.25)$$

Nyní využijeme symetrie matice tuhosti, tedy platnosti $A^T = A$ a provedeme transpozici rozkladu matice A (traspozice diagonální matice je ta samozřejmě samá matice):

$$A^T = (LD\bar{U})^T = \bar{U}^T D^T L^T = \bar{U}^T D L^T \quad (3.26)$$

Nezapomeňme, že vzhledem ke zmíněné symetrii matice tuhosti musí platit $A = A^T$:

$$LD\bar{U} = \bar{U}^T D L^T \quad (3.27)$$

Z tohoto zápisu vyplývá rovnost mezi maticemi \bar{U} a L^T . Využijme tedy této rovnosti a dosadíme $\bar{U} = L^T$ do 3.25. Obdržíme tedy výsledný LDL^T rozklad symetrické matice A :

$$A = LDL^T \quad (3.28)$$

Máme-li matici A v kýženém LDL^T rozkladu, lze tento rozklad poměrně jednoduše použít pro řešení soustavy rovnic $Ax = b$. Najdeme nejprve pomocný vektor \bar{b} , pro který bude platit:

$$L\bar{b} = b \quad (3.29)$$

Tento pomocný vektor \bar{b} získáme snadno pomocí modifikace vektoru pravých stran stejnými koeficienty, které již máme k dispozici z rozkladu matice A (jsou to stejné Gaussovy koeficienty):

$$\bar{b} = L^{-1}b = L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\dots L_2^{-1}L_1^{-1}b \quad (3.30)$$

a dosadíme tento výraz do rovnice $Ax = b$ (a zároveň rozložíme A pomocí LDL^T rozkladu):

$$LDL^T x = L\bar{b} \quad (3.31)$$

Nyní tuto rovnici můžeme zleva vynásobit postupně inverzní maticí k L :

$$DL^T x = \bar{b} \quad (3.32)$$

a posléze inverzní maticí D^{-1} :

$$L^T x = D^{-1}\bar{b} \quad (3.33)$$

Inverzní maticí k diagonální najdeme snadno a matice L^T je horní trojúhelníková, to znamená, že poslední rovnice z této soustavy je rovnice o jedné neznámé. Ostatní neznámé získáme zpětnou substitucí.

3.2 Iterační metody

Výhodou iteračních metod je zejména to, že nekladou tak velké nároky na paměť počítače jako metody přímé. Matice A se nemusí celá ukládat do operační paměti a proto velké úlohy, které není možno počítat pomocí GEM, lze řešit iterativně.

Základní myšlenkou všech iteračních metod je převedení rovnice $Ax = b$ na tvar vhodný k iterování, tedy tvar, ve kterém bude na levé straně pouze neznámý vektor x a pravá strana bude obsahovat modifikovanou matici A , např. matici M :

$$x = Mx + n \quad (3.34)$$

nyní lze snadno napsat iterační formuli ve tvaru:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + n \quad (3.35)$$

To znamená, že jsme zapsali $(k+1)$ přiblížení hledaného vektoru x v závislosti na jeho hodnotě z předešlého iteračního kroku (k) . Obecně lze popsat libovolnou iterační metodu v několika málo krocích:

1. volba počátečního vektoru $x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$

2. výpočet $(k+1)$ (v prvním kroku tedy první) aproximace vektoru řešení v závislosti na předchozí iteraci

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + n$$

3. test zastavovací podmínky (rozhodnutí o ukončení či pokračování iteračního procesu):

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} < \delta$$

kde δ je zvolená přesnost řešení.

4. odhadnutí chyby řešení; obecně lze zapsat

$$|x^{(k+1)} - x| < \varepsilon$$

slovně se dá vyjádřit, že $(k+1)$ iterace aproximuje přesné řešení x s chybou ε .

Iterační metody lze ještě rozdělit na *stacionární* a *nestacionární*. Při nestacionárních iteračních metodách se v průběhu výpočtu mění obecně iterační matice M i iterační vektor n , popř. pouze jeden z nich. V tomto textu se budeme zabývat pouze stacionárními metodami.

3.2.1 Jacobiho iterační metoda

Zkusme si odvodit algoritmus JIM. Jde vlastně o to, připsat řešenou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.36)$$

na tvar vhodný k iterování, tedy potřebujeme na obou stranách rovnice vektor x . Tedy potřebujeme v i -té rovnici vyjádřit i -tou neznámou x_i , tedy vydělme každou rovnici diagonálním prvkem a_{ii} :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že jsme skutečně dostali tvar vhodný k iterování. Snadno lze totiž označit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \quad n = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

a dospět tak k Jacobiho iterační formuli ve tvaru:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + n \quad (3.38)$$

Všimneme-li si lépe rovnice 3.37, zjistíme, že ke stejnému výsledku lze dospět pomocí LDU rozkladu matice A , tedy rozkladu na dolní trojúhelníkovou matici L , diagonální matici $D = [d_{ii}]$ a horní trojúhelníkovou matici U , pro jednoduhost v případě matice $(4, 4)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{21} & & & \\ l_{31} & l_{32} & & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & d_{33} & \\ & & & d_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & & u_{23} & u_{24} \\ & & & u_{34} \\ & & & \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Soustavu rovnic lze tedy pomocí LDU rozkladu zapsat jednoduše takto:

$$(L + D + U)x = b \quad (3.40)$$

Toto lze snadno upravit na tvar vhodný k iterování:

$$\begin{aligned} Lx + Dx + Ux &= b \\ Dx &= -(L + U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

Matice M a vektor n v obecném zápisu iterační metody budou mít tedy tvar

$$\begin{aligned} M &= -D^{-1}(L + U) \\ n &= D^{-1}b \end{aligned}$$

Jacobiho iterační metodu lze tedy psát ve tvaru:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b \quad (3.41)$$

Algoritmus JIR můžeme pro matici $A(n, n)$ a vektor $b(n)$ zapsat ve dvou cyklech (m je počet iterací, zde tedy jednoduše, bez zastavovací podmínky):

```

pro k = 1, 2, ..., m
  pro i = 1, 2, ..., n
    x_i^{(k+1)} = 1/a_{ii} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})
  konec i
konec k

```

Důležitou otázkou u všech iteračních metod je otázka jejich konvergence. Ke konvergenci si uvedeme dvě základní věty na závěr této kapitoly.

Poznámka V metodě konečných prvků budeme řešit obyčejné rovnici $Ax = b$, kde matice A bude symetrická podle hlavní diagonály. V tom případě rozklad matice A na horní trojúhelníkovou U , diagonální D a dolní trojúhelníkovou L bude snazší o to, že horní trojúhelníková matice je transpozicí dolní, tedy $U = L^T$. Zmíněný rozklad tedy budeme nazývat shodně s literaturou LDL^T rozkladem matice A . Jednoduše lze zapsat $A = LDL^T$, např. v případě $(4, 4)$ matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{21} & & & \\ l_{31} & l_{32} & & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & d_{33} & \\ & & & d_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{12}^T & l_{13}^T & l_{14}^T \\ & l_{23}^T & l_{24}^T \\ & & l_{34}^T \\ & & & \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

3.2.2 Gaussova-Seidelova iterační metoda

Jacobiova metoda se v praxi téměř nepoužívá a to zejména proto, že Gauss-Seidelova metoda konverguje skoro vždy, když konverguje Jacobiho metoda, navíc může konvergovat i v případě, že Jacobiho metoda nekonverguje a rychlost konvergence je u GSM většinou vyšší, než konvergence JIM.

GSM narozdíl od JIM používá již vypočítané složky vektoru $x^{(k+1)}$ v dalším výpočtu. To je i důvodem, proč se GSM rovněž nazývá metoda postupných oprav. V $(k+1)$ -ním iteračním kroku to bude tedy vypadat následovně:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} \right) \end{aligned}$$

Použitím LDU rozkladu matice A запиšme opět řešenou soustavu rovnic ve tvaru vhodném k iterování:

$$\begin{aligned} Lx + Dx + Ux &= b \\ (L + D)x + Ux &= b \\ (L + D)x &= -Ux + b \end{aligned}$$

z toho plyne

$$x = (L + D)^{-1} Ux + (L + D)^{-1} b \quad (3.43)$$

tuto rovnici můžeme rozřešit vzhledem ke $(k+1)$ -ní iteraci $x^{(k+1)}$

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1} Ux^{(k)} + (L + D)^{-1} b \quad (3.44)$$

GSM má velkou výhodu a tou je možnost dokázat její konvergenci v případě, že matice A je symetrická a pozitivně definitní. Další výhodou GSM je menší paměťová náročnost oproti JIM. Pro GSM jsou důležité některé její další vlastnosti, zejména podmínky konvergence. Uvedeme si je zde pouze bez důkazu, podrobnosti viz např. [rektorys Var metody, spíš někde jinde].

Věta Je-li matice A symetrická a pozitivně definitní, Gaussova-Seidelova metoda pro řešení soustavy rovnic $Ax = b$ konverguje nezávisle na volbě počátečního vektoru $x^{(0)}$.

Věta (Postačující podmínka konvergence) Posloupnost iterací

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + n$$

konverguje pro libovolný počáteční vektor $x^{(0)}$ a libovolný vektor n , když norma iterační matice M splňuje nerovnost

$$\|M\| \leq q < 1 \quad (3.45)$$

3.2.3 Jacobiho metoda s relaxací

Přepíšeme-li JIM (3.41) na tvar

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}(L + D + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

to znamená, že $(k+1)$ -ní iteraci získáme jako součet k -té iterace a tzv. *rezidua* $r^{(k+1)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + r^{(k+1)}, \text{ kde } r^{(k+1)} = D^{-1} \left(b - Ax^{(k)} \right)$$

vy násobíme-li zmíněné reziduum $r^{(k+1)}$ vhodně zvoleným číslem ω , můžeme získat novou iterační metodu, která může konvergovat rychleji.

Jacobiho iterační metoda s relaxací se pak dá zapsat

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} \left(b - Ax^{(k)} \right) \quad (3.46)$$

kde $k = 1, 2, \dots$ a ω se nazývá *relaxační parametr*. Ve složkách dostáváme vztah

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (3.47)$$

3.2.4 Gaussova-Seidelova relaxační metoda (SOR)

Tzv. superrelaxační metoda se používá k urychlení konvergence. Gaussovu iterační metodu přepíšeme opět pomocí *rezidua* do tvaru

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + r_i^{(k+1)}$$

kde

$$r_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

i -té reziduum $r_i^{(k+1)}$ vynásobme vhodným parametrem ω . Obdržíme

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega r_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (3.48)$$

Gaussovu-Seidelovu relaxační metodu (Successive OverRelaxation, SOR) lze tedy zapsat

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} \left(b - Mx^{(k+1)} - (D + N)x^{(k)} \right) \quad (3.49)$$

Dá se ukázat, že aby metoda SOR konvergovala, je nutné, aby parametr ω splňoval jednoduchou konvergenční podmínku

$$0 < \omega < 2 \quad (3.50)$$

Pro úplnost запиšme ještě algoritmus SOR:

pro $k = 1, 2, \dots, m$

pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

konec i

konec k

3.3 Stabilita a citlivost

3.3.1 Stabilita

Důležitým aspektem při numerickém řešení problémů algebry jsou stabilita a citlivost dané metody.

Rozsáhlé úlohy MKP vedou na velké množství rovnic ve výsledné soustavě lin. alg. rovnic. Některé úlohy mohou mít špatné numerické vlastnosti, např. úloha může být *citlivá* na malé změny vstupních dat. To znamená, že malá změna ve vstupních datech může mít velký vliv na sledované veličiny ve výsledku.

Proto bývá nutné (i když je to často při numerických výpočtech opomíjeno), provést tzv. *citlivostní analýzu* daného problému.

Vše na příkladech

Teorie - odkaz na ...

Příklad Gaussovou eliminací vyřešte soustavu rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 0,0001 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uvažujte aritmetiku s konečnou přesností, kde strojová přesnost je $\varepsilon_M = 10^{-4}$.

3.3.2 Citlivost

Citlivost na perturbaci vstupních dat, tedy jak se projeví malá změna vstupních dat (zatížení, materiálové charakteristiky, rozměry konstrukce...) na sledovaných výsledcích (veličinách jako napětí, deformace, maximální posun...).

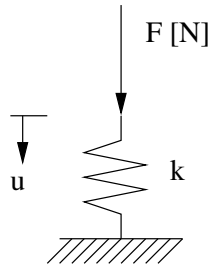
Kapitola 4

Základní princip metody konečných prvků

Principem metody je reprezentace složité geometrie zkoumané oblasti, ať už rovinné nebo prostorové, pomocí velmi jednoduchých částí (konečných elementů) spojených v tzv. uzlových bodech. Pod vnějším zatížením se zkoumané těleso deformuje a pro reprezentaci skutečných posunutí jednotlivých uzlových bodů volí jednoduché funkce, které tato posunutí aproximují. Pro stanovení soustavy podmínek rovnováhy se používá variacních principů mechaniky (princip minima potenciální energie).

Potenciální energie zatíženého pružného tělesa je dána součtem vnitřní energie (výsledek deformace, tzv. deformační energie) a potenciální energie vnějších sil (zatížení). Jestliže je těleso v rovnováze, tato potenciální energie nabývá minimální hodnoty.

Tento princip si ukážeme na jednoduchém příkladě pružiny zatížené vnější silou.



Obrázek 4.1: Pružina zatížená vnější silou

Vyjádříme nyní vztahy pro vnitřní a vnější energii tohoto systému:

- vnitřní, deformační energie v deformované pružině

$$U = \frac{1}{2}(\text{sila.v.pruzine}) \times (\text{posunutí}) = \frac{1}{2}(ku)u = \frac{1}{2}ku^2$$

- potenciální energie vnější síly F

$$W_p = (\text{sila}) \times (\text{posunutí}) = -Fu$$

- celková potenciální energie systému

$$\Pi = U + W_p = \frac{1}{2}ku^2 - Fu$$

- minimum potenciální energie

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = ku - F = 0 \Rightarrow ku = F$$

nám dává podmínku rovnováhy pro zatíženou pružinu.

Malinko předběhneme a popíšeme si postup metody konečných prvků.

1. *Diskretizace kontinua*
2. *Volba básových funkcí posunutí* (DISPLACEMENT MODEL)
3. *Odvození matice tuhosti jednotlivého elementu pomocí variačního principu*
tento krok vede k podmínce rovnováhy pro jednotlivý element, kterou budeme uvádět ve tvaru:

$$[k]_e \{r\}_e = \{R\}_e \quad (4.1)$$

$[k]_e$...matice tuhosti elementu (ELEMENT STIFFNESS MATRIX)

$\{r\}_e$...vektor uzlových posunutí (NODAL DISPLACEMENT VECTOR)

$\{R\}_e$...vektor uzlových sil (NODAL FORCE VECTOR)

Prvky matice tuhosti se někdy nazývají též příspěvkové koeficienty (INFLUENCE COEFFICIENTS). Prvek matice tuhosti k_{ij} vyjadřuje totiž sílu v místě a směru neznámé i od jednotkového zatížení v místě a směru odpovídajícímu neznámé j .

4. *Globalizace*. Sestavení celkové matice tuhosti (matice tuhosti soustavy, globální matice tuhosti, GLOBAL STIFFNESS MATRIX) pro celé kontinuum. Sestavení globálního vektoru zatížení (GLOBAL FORCE VECTOR)

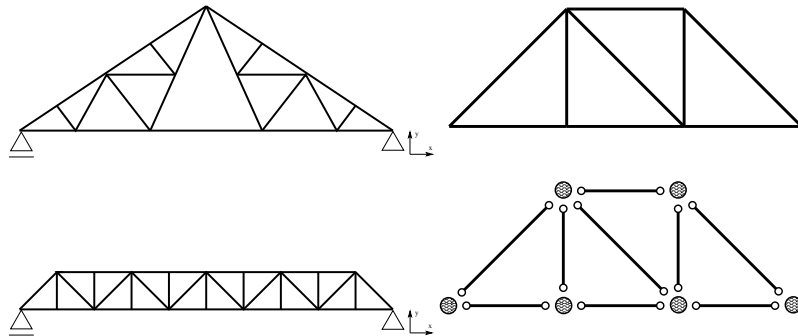
$$[K]\{r\} = \{R\} \quad (4.2)$$

5. Výpočet neznámých posunutí (globální vektor posunutí $\{r\}$). Toto nelze samozřejmě provést bez geometrických okrajových podmínek (uložení, podepření konstrukce).
6. Výpočet odvozených veličin, např. deformací a napětí ze známých uzlových posunutí.

Kapitola 5

Přímá metoda tuhosti (DIRECT STIFFNESS METHOD)

Prutové konstrukce jsou patrně nejjednodušším příkladem sloužícím k demonstraci základních principů MKP. Jsou to soustavy kloubově spojených prutů schopných přenášet pouze osově zatížení (tah, tlak). Jednotlivé pruty přitom mohou být myšleně nahrazeny pružinami o tuhosti $k = \frac{EA}{L}$.

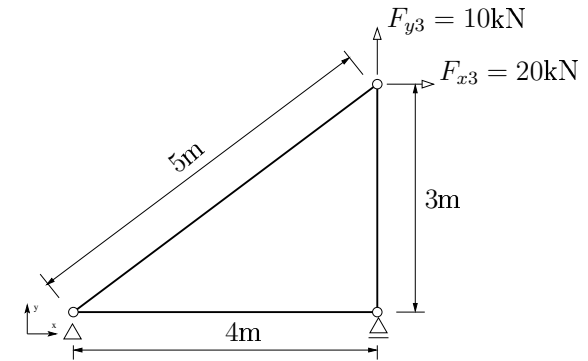


Obrázek 5.1: Příhradové konstrukce = hmotné body spojené kyvnými pruty

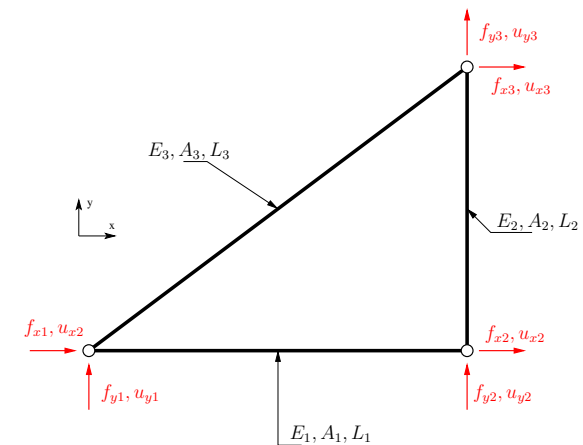
Patrně největší výhodou bude fakt, že při malém počtu prutů veškeré výpočty bude možno provést ručně bez pomoci počítače a dále pak relativně snadná implementace (ukázáno bude pomocí MATLABu).

Ukázková příhradovina sestává ze tří prutů a ze tří styčniců. V terminologii MPK se pruty nazývají *elementy* (ELEMENTS) a styčnící *uzlové body* (NODES, NODAL POINTS). Charakteristiky prutů budou označeny horním indexem v závorkách, např. délky prutů budou $L^{(i)}$, moduly pružnosti $E^{(i)}$ a průřezové plochy $A^{(i)}$. Průřezové plochy i moduly pružnosti se předpokládají konstantní po celé délce prutu. Pruty (resp. elementy) budou obecně označeny horním indexem e , např. průřezová plocha elementu je $A^{(e)}$.

Geometrie konstrukce je vztažena ke globální soustavě souřadnic $\{x, y\}$ (GLOBAL COORDINATE SYSTEM, OVERALL COORDINATE SYSTEM). Externí síly (zatížení) mohou působit pouze



Obrázek 5.2: Zadání příkladu



Obrázek 5.3: Koncové síly a koncová posunutí konstrukce

ve styčných konstrukce. Globální vektor zatížení představuje sloupcový vektor o šesti řádcích:

$$f = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Dalším důležitým prvkem bude vektor posunutí. Z mechaniky víme, že celkový stav přihradové konstrukce je úplně dán posuny jednotlivých styčnicků. Budeme-li tedy znát globální vektor posunutí, budeme schopni vypočítat i napětí v jednotlivých prutech. Globální vektor posunutí je tedy:

$$r = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Tyto neznámé se také nazývají stupně volnosti (DEGREES OF FREEDOM, STATE VARIABLES). Dalším úkolem bude zajisté specifikovat okrajové podmínky (BOUNDARY CONDITIONS). Tyto hodnoty vlastně známe dopředu a můžeme je rovnou specifikovat v globálním vektoru posunutí, ovšem z výpočetního hlediska toto může počkat až jako poslední krok před výpočtem soustavy rovnic.

5.1 Globální soustava rovnic (MASTER STIFFNESS EQUATION)

Tato soustava rovnic vyjadřuje vztah mezi uzlovými silami f a styčnickovými posuvy r celé konstrukce před určením okrajových podmínek. Výsledná soustava lineárních rovnic bude mít tvar:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

v maticovém zápisu pak

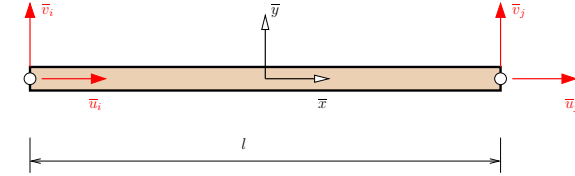
$$f = Kr \quad (5.4)$$

kde K je *globální matice tuhosti*, která je symetrická,

5.2 Určení matice tuhosti prvku

Přímá metoda spočívá ve třech krocích: (1) oddělení jednotlivých prvků, (2) lokalizace, (3) odvození matice tuhosti prvku.

V prvním kroku vedle globální soustavy souřadnic zavedeme pro každý prvek ještě lokální souřadnicový systém, v němž odvodíme vztahy mezi vektorem posunutí a vektorem uzlových sil prostřednictvím lokální matice tuhosti. Lokální soustavu souřadnic budeme značit $\{\bar{x}^{(e)}, \bar{y}^{(e)}\}$ a úhel mezi globální osou x a lokální osou $\bar{x}^{(e)}$ budeme značit $\phi^{(e)}$. Počátek lokálního souřadnicového systému je umístěn do středu každého prutu.



Obrázek 5.4: Tažený-tlačený prvek v lokálním souřadném systému

Uzlové síly a uzlová posunutí jsou mezi sebou svázány pomocí:

$$\bar{f} = \bar{K}\bar{r} \quad (5.5)$$

což pro přehlednost ještě rozepíšeme:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{xixi} & \bar{K}_{xiyi} & \bar{K}_{xixj} & \bar{K}_{xiyj} \\ \bar{K}_{yixi} & \bar{K}_{yiyi} & \bar{K}_{yixj} & \bar{K}_{yiyj} \\ \bar{K}_{jixi} & \bar{K}_{jiyi} & \bar{K}_{jixj} & \bar{K}_{jiyj} \\ \bar{K}_{yjxi} & \bar{K}_{yjyi} & \bar{K}_{yjxj} & \bar{K}_{yjyj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

\bar{f} se nazývá vektor uzlových sil elementu a \bar{r} vektor uzlových posunutí elementu a \bar{K} je matice tuhosti elementu. Nejjednodušším způsobem, jak stanovit prvky matice tuhosti elementu je využít znalostí z mechaniky materiálu. Prut lze nahradit lineární pružinou o tuhosti

$$k_s = \frac{EA}{L} \quad (5.7)$$

tudíž vztah síla-posunutí nabývá tvaru:

$$F = k_s u = \frac{EA}{L} u \quad (5.8)$$

kde F je vnitřní normálová síla v prutu a u je prodloužení (zkrácení) prutu. Normálovou sílu i prodloužení lze zapsat pomocí uzlových sil a uzlových posunutí:

$$F = \bar{f}_{xj} - \bar{f}_{xi} \quad d = \bar{u}_{xj} - \bar{u}_{xi} \quad (5.9)$$

tyto rovnice vyjadřují podmínku rovnováhy a kinematickou podmínku kompatibility. Spojením 5.8 a 5.9 získáváme maticový zápis

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \bar{K}\bar{r} \quad (5.10)$$

tudíž

$$\bar{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

\bar{K} je matice tuhosti taženého-tlačeného prvku v lokálních souřadnicích.

5.2.1 Poznámky k odvození matice tuhosti taženého-tlačeného prvku

Odvození matice tuhosti prvku a význam jednotlivých členů matice tuhosti lze osvětlit velmi názorně na následujícím příkladu. Vztah mezi uzlovými silami $\{\bar{f}\}$ a vektorem uzlových posunutí $\{\bar{r}\}$ pomocí matice tuhosti prvku je dán:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Přepíšme si co vlastně znamená první řádek tohoto zápisu:

$$\bar{f}_{x1} = \bar{K}_{11}\bar{u}_{x1} + \bar{K}_{12}\bar{u}_{y1} + \bar{K}_{13}\bar{u}_{x2} + \bar{K}_{14}\bar{u}_{y2} \quad (5.13)$$

Nyní položíme všechna koncová posunutí prutu kromě \bar{u}_{x1} rovna nule. Rovnice se nám zredukuje na $\bar{f}_{x1} = \bar{K}_{11}\bar{u}_{x1}$. Nyní ihned vidíme význam jednotlivých prvků matice tuhostí, neboť platí: $\bar{K}_{11} = \frac{f_{x1}}{\bar{u}_{x1}}$.

Můžeme tedy slovně psát: **Člen \bar{K}_{ij} matice tuhosti prvku je síla (moment) v místě a směru neznámé i od jednotkového posunutí (pootočení) v místě a směru neznámé j . Všechna ostatní posunutí (a pootočení) jsou rovna nule (držena).**

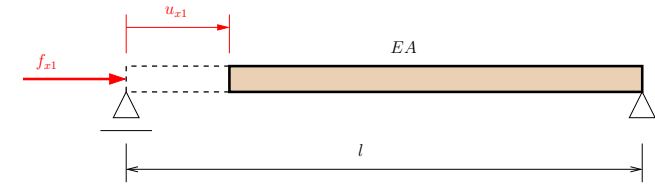
Toto je znázorněno na obrázku 5.5. Posunutí v libovolném místě prutu lze spočítat jako $u(x) = \frac{F_x}{EA}$, celkové protažení (zkrácení) prutu je $u = \frac{Fl}{EA}$. Nyní není nic jednoduššího než dosadit do výrazu pro K_{11} :

$$\bar{K}_{11} = \frac{\bar{f}_{x1}}{\bar{u}_{x1}} = \frac{\bar{f}_{x1}}{\frac{f_{x1}l}{EA}} = \frac{EA}{l} \quad (5.14)$$

Na tomto místě snad ještě doplníme poznámku k symetrii matice tuhosti. Ta je vidět rovněž z významu jejích jednotlivých prvků. Rozepišme si například ještě její třetí řádek

$$\bar{f}_{y1} = \bar{K}_{31}\bar{u}_{x1} + \bar{K}_{32}\bar{u}_{y1} + \bar{K}_{33}\bar{u}_{x2} + \bar{K}_{34}\bar{u}_{y2} \quad (5.15)$$

a porovnejme s 5.13. Zatímco $\bar{K}_{13} = \frac{f_{x1}}{\bar{u}_{x2}}$ se dá slovy vyjádřit jako: "jak velkou silou musíme působit v místě **1** aby v místě **3** vzniklo jednotkové posunutí, $\bar{K}_{31} = \frac{f_{x2}}{\bar{u}_{x1}}$ je: "síla vzniklá v místě **3** od jednotkového posunutí v místě **1**. Toto ilustruje názorně obrázek 5.5.



Obrázek 5.5: Význam prvků matice tuhosti prutu

5.3 Transformace souřadnic

Pro posunutí vyjádřená v globální, resp. lokální souřadnicové soustavě platí následující jednoduchý transformační vztah:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xi} &= u_{xi} \cos \phi + u_{yi} \sin \phi \\ \bar{u}_{yi} &= -u_{xi} \sin \phi + u_{yi} \cos \phi \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj} \cos \phi + u_{yj} \sin \phi \\ \bar{u}_{yj} &= -u_{xj} \sin \phi + u_{yj} \cos \phi \end{aligned} \quad (5.16)$$

zapsáno v maticové formě:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

kde $c = \cos \phi$ a $s = \sin \phi$, matice se nazývá transformační matice pro pole posunutí a značí se T . Dle obrázku 5.6 je zřejmé, že se uzlové síly transformují dle $f_{xi} = \bar{f}_{xi} - \bar{f}_{yi} \sin \phi$, což vede k alternativnímu zápisu:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

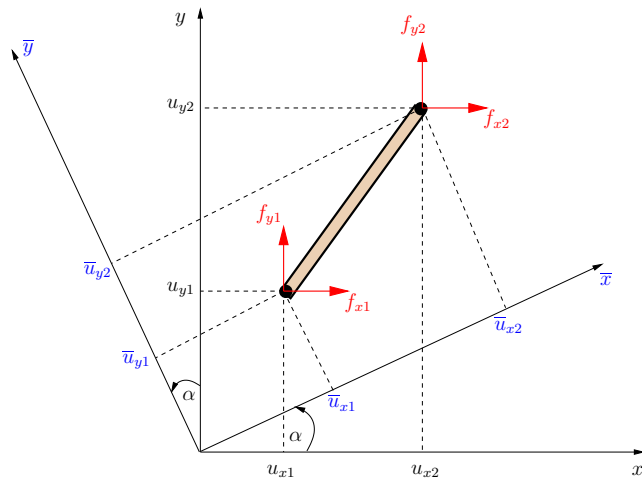
ve kterém se transformační matice nazývá transformační matice pro uzlové síly, značit ji budeme T_f a platí $T = T_f^T$.

5.4 Globalizace

Od této chvíle budeme používat již dříve zmíněný index ^(e), který značí veličinu týkající se elementu. Podmínka rovnováhy elementu v globálních souřadnicích je dána

$$f^{(e)} = K^{(e)}r^{(e)} \quad (5.19)$$

Transformace z globálního souřadného systému je dána pomocí



Obrázek 5.6: Transformace souřadnic

$$\bar{r}^{(e)} = T^{(e)} r^{(e)} \quad f^{(e)} = (T^{(e)})^T \bar{f}^{(e)} \quad (5.20)$$

Zavedením těchto výrazů do 5.5 a porovnáním s 5.19 získáme důležitý transformační vztah mezi maticí tuhosti elementu v globálním souřadnicovém systému $K^{(e)}$ a maticí tuhosti elementu v lokálním souřadnicovém systému $\bar{K}^{(e)}$:

$$K^{(e)} = (T^{(e)})^T \bar{K}^{(e)} T^{(e)} \quad (5.21)$$

Násobíme-li matici tuhosti elementu zleva transformovanou a zprava původní transformační maticí $T^{(e)}$, získáváme po provedení těchto operací

$$K^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

kde $K^{(e)}$ je matice tuhosti elementu v globálních souřadnicích.

ÚKOL: Matici tuhosti v globálních souřadnicích lze snadno vyčíslit pro náš uvedený příklad. Stejně snadné je i zapsat podmínky rovnováhy pro všechny tři elementy v globálních souřadnicích.

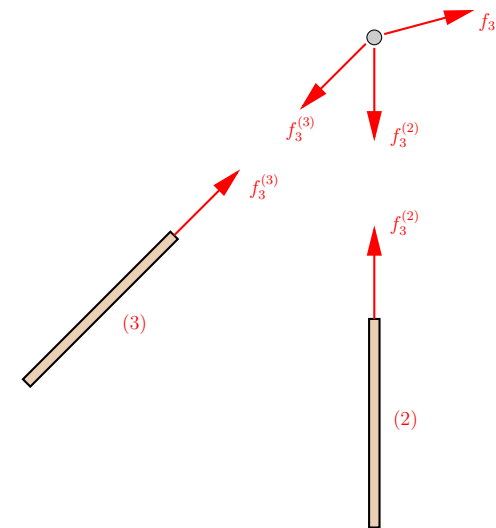
5.5 Sestavení globální matice tuhosti

Úkolem při sestavování globální matice tuhosti je umístění příspěvků matic tuhosti jednotlivých elementů. Tento proces se obecně nazývá (MERGING). Tento proces se dá

fyzikálně interpretovat jako opětné sestavení jednotlivých elementů (nyní prutů) do celé konstrukce. V globální matici tuhosti sčítáme příspěvky jednotlivých elementů do tuhosti celé konstrukce. Toto musí splňovat matematicky následující dvě pravidla:

- *Kompatibilita deformací:* styčnickové posuny všech prutů spojených v jednom styčnicku musí být stejné.
- *Rovnováha ve styčnicku:* v každém styčnicku je splněna silová podmínka rovnováhy, t.j. vnitřní síly všech prutů jdoucích do styčnicku vyrovnávají vnější zatížení tohoto styčnicku.

Dle obrázku 5.7 musí naše prutová konstrukce splňovat následující:

Obrázek 5.7: Rovnováha ve styčnicku - f_3 je vnější zatížení styčnicku

$$\begin{aligned} u_{x3}^{(2)} &= u_{x3}^{(3)} & u_{y3}^{(2)} &= u_{y3}^{(3)} & (5.23) \\ f_{x3} &= f_{x3}^{(2)} + f_{x3}^{(3)} & f_{y3} &= f_{y3}^{(2)} + f_{y3}^{(3)} \end{aligned}$$

Postup sestavení globální matice tuhosti (matice tuhosti konstrukce) se dá symbolicky zapsat jako:

$$f^{(1)} = K^{(1)} r \quad f^{(2)} = K^{(2)} r \quad f^{(3)} = K^{(3)} r \quad (5.24)$$

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} = (K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}) r = K r \quad (5.25)$$

Jestliže toto vše provedeme, naše výsledné rovnice (MASTER STIFFNESS EQUATIONS) budou mít tvar:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Tento postup sestavování globální matice tuhosti se však v praxi nepoužívá a to z následujícího důvodu. Aby se součet matic tuhosti jednotlivých elementů dal provést, musely by tyto matice mít hodnotu rovnou hodnotě globální matice tuhosti, v našem případě hodnotu 6. Bylo by tedy nutné pro každou matici tuhosti elementu alokovat paměť pro $n \times n$ čísel.

Z tohoto důvodu se provádí sestavování globální matice tuhosti pomocí tzv. *kódových čísel*, kdy se každému prvku nejprve přiřadí kódová čísla, někdy se hovoří o tzv. tabulce stupňů volnosti elementu. Matice tuhosti jednotlivých prvků nejsou zvětšeny na velikost globální matice tuhosti (navíc se většinou rovnou přihlíží k symetrii matic, pro jednoduchost v textu vynecháme). Pro náš případ budou kódová čísla u matice tuhosti jednotlivých elementů vypadat následovně (číslo vždy odpovídá pozici příslušného stupně volnosti elementu v globálním vektoru uzlových posunutí):

$$C^{(1)} = \{1, 2, 3, 4\} \quad C^{(2)} = \{3, 4, 5, 6\} \quad C^{(3)} = \{1, 2, 5, 6\}$$

Pomocí těchto kódových čísel se potom příspěvky tuhosti jednotlivých elementů do tuhosti celé konstrukce promítnou "umístěním" prvků jednotlivých matic tuhosti elementu takto:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} \\ K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(2)} + K_{34}^{(3)} \\ K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} + K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(2)} + K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

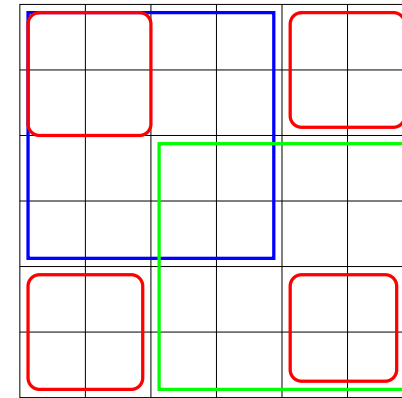
Tento postup bude snad patrnější z grafického znázornění. Schematicky pomocí barevného obrázku (5.8) je znázorněno, na kterých místech v globální matice tuhosti se v našem případě sčítají příspěvky matic tuhosti jednotlivých elementů.

5.6 Řešení (SOLUTION)

Nyní nám zbývá poslední krok: specifikovat okrajové podmínky a vyřešit soustavu rovnic. Tím získáme globální vektor posunutí $\{r\}$. Těmto neznámým se říká *primární*, ostatní veličiny (deformace, napětí) se budou odvozovat na základě tohoto vektoru.

5.6.1 Aplikace okrajových podmínek redukcí

Jedním ze způsobů, jak do soustavy rovnic aplikovat okrajové podmínky, je použít tzv. *redukcí*, t.j. na místa známých posunů (v našem případě to budou tři nuly - dvě za



Obrázek 5.8: Grafické znázornění sestavení globální matice tuhosti

pevný kloub a jedna za posuvnou podporu). Bez specifikace okrajových podmínek nemá soustava rovnic řešení, neboť matice tuhosti je singulární (řádky a sloupce matice K jsou lineární kombinací). Fyzikálně se toto dá interpretovat pohybem tělesa jako tuhého celku (RIGID BODY MOTION), konstrukce "plave" v rovině x, y .

Aplikujeme tedy okrajové podmínky (uložení konstrukce) následovně:

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{y2} = 0 \quad (5.28)$$

Dále můžeme specifikovat vektor vnějších sil $\{f\}$:

$$f_{x2} = 0 \quad f_{x3} = 20 \quad f_{y3} = 10 \quad (5.29)$$

Okrajové podmínky nám eliminují tři řádky a tři sloupce, což vede na následující soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Tato rovnice se nazývá (REDUCED MASTER STIFFNESS SYSTEM). Tuto soustavu rovnic snadno ručně vypočteme (např. Gaussovou eliminací) a výsledný vektor posunutí je:

$$\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Toto je pouze částečný vektor posunutí, celkový vektor by byl:

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

5.6.2 Aplikace okrajových podmínek modifikací

Aplikace okrajových podmínek redukcí má zjevnou nevýhodu, která se projeví při programování (přeuspořádání matice, která je již v paměti). Tento způsob aplikace okrajových podmínek se tedy nepoužívá a okrajové podmínky se aplikují tzv. *modifikací*, při které do řádků a sloupců matice tuhosti, které odpovídají nulovým neznámým posunutím, zapíšeme nulu, pouze na místo diagonálních členů zapíšeme jedničku; v našem případě je $u_{x1} = u_{y1} = u_{y2} = 0$, tedy soustava bude vypadat následovně:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Řešením 5.33 nyní získáme *úplný* vektor globálních posunutí, včetně nulových hodnot posunutí v místech, kde byly předepsány okrajové podmínky. Tento postup má zjevnou výhodu při aplikaci nenulových okrajových podmínek, v našem případě při aplikaci předepsaných posunutí (pokles podpory). Motivací je opět vyhnout se přeuspořádání matice tuhosti celé konstrukce. Aplikace nenulových okrajových podmínek se pak provede ve dvou krocích. Nejprve modifikujeme globální matici tuhosti K tak, aby řádky s předepsanými posunými byly triviální rovnice vyjadřující vlastně pouze hodnotu předepsaného posunu v daném místě. Pro jednoduchost uvažujme nenulová posunutí daná takto $u_{x1} = 0.1$ $u_{y1} = -0.2$ $u_{y2} = -0.3$. První, druhá a čtvrtá rovnice tedy pouze vyjadřují hodnotu předepsaného posunutí v těchto místech (např. $1 \times u_{x1} = 0.1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0 \\ -0.3 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Řešením této soustavy získáme modifikovaný vektor globálních posunutí $r^{(M)}$. V dalším kroku můžeme tuto rovnici modifikovat tak, že všechny známé členy z levé strany přeneseme na pravou stranu a získáme tak modifikovaný vektor uzlových sil $f^{(M)}$. Řešením této modifikované soustavy rovnic získáme *úplný* vektor uzlových posunutí.

5.6.3 Aplikace okrajových podmínek v maticové podobě

Aplikace nenulových okrajových podmínek se dá snadněji vyjádřit v maticové podobě. Nejprve rozdělme soustavu globálních rovnic $Kr = f$ na dvě soustavy rovnic:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Rozepíšeme-li si první řádek této soustavy:

$$K_{11}r_1 + K_{12}r_2 = f_1 \quad (5.36)$$

bude zřejmé, že pokud vektor r_2 bude obsahovat pouze známá, *předepsaná* posunutí a zároveň vektor f_1 pouze známé koncové síly, můžeme neznámé posuny vektoru r_1 snadno určit:

$$K_{11}r_1 = f_1 - K_{12}r_2 \quad (5.37)$$

Tato rovnice vyjadřuje vlastně redukováný systém rovnic. Jestliže budou okrajové podmínky nulové (homogenní), bude vektor r_2 , který obsahuje předepsané posuny nulový a rovnice se zjednoduší na:

$$K_{11}r_1 = f_1 \quad (5.38)$$

Tento postup aplikace okrajových podmínek modifikací se nejčastěji zapisuje v maticové podobě následovně:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - K_{12}r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Toto je pouze redukováný systém 5.37 rozšířený o triviální rovnici $Ir_2 = r_2$. Výhodou tohoto postupu je, že opět získáme *úplný vektor posunutí* včetně předepsaných posunutí r_2 .

5.7 Výpočet vnitřních sil (odvozených veličin) (POST PROCESSING)

Posledním krokem je výpočet odvozených veličin (DERIVED OR RECOVERED QUANTITIES). Odvozenými se tyto veličiny nazývají proto, protože jsou vypočteny na základě *primárních neznámých*, kterými jsou uzlová posunutí.

Jestliže vektor výsledných uzlových posunutí vynásobíme zleva globální maticí tuhosti K , získáme vektor uzlových sil, ve kterém jsou obsaženy nejen známé vnější síly (zatížení), ale i reakce v podporách: $f_{x1} = -20$, $f_{y1} = -20$, $f_{y2} = 10$. Je snadné zkontrolovat podmínky rovnováhy konstrukce jako celku.

Další odvozenou veličinou jsou normálové síly v prutech a jim odpovídající normálové napětí. Normálové síly v jednotlivých prutech $N^{(e)}$ a normálová napětí $\sigma^{(e)}$ lze snadno spočítat na základě znalosti protažení jednotlivých prutů $\Delta^{(e)}$:

$$\Delta^{(e)} = \bar{u}_{xj}^{(e)} - \bar{u}_{xi}^{(e)} \quad N^{(e)} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}}\Delta^{(e)} \quad \sigma^{(e)} = \frac{N^{(e)}}{A^{(e)}} \quad (5.40)$$

Poznámka: Tato kapitola sloužila jako úvod do koncepce metody konečných prvků. Postupu MKP bylo vysvětleno na velmi jednoduchém typu prvku (tažený-tlačený prut). V dalším výkladu bude značení poněkud zjednodušeno, bude vynechán index (e) značící element, ale například matice tuhosti elementu bude značena malým $[k]$, k a globální matice tuhosti velkým $[K]$, K .

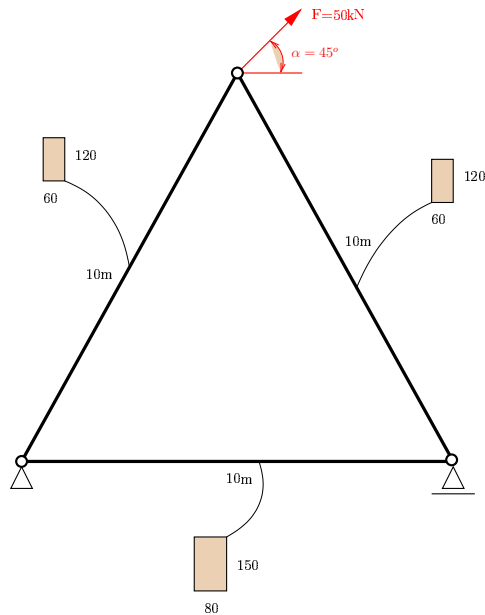
5.8 Implementace taženého-tlačeného prvku v Octave

Výše uvedený příklad taženého-tlačeného prvku se pokusíme co nejjednodušeji implementovat pomocí některého z jazyků symbolické algebry. Nejpoužívanějšími jazyky pro vědecko-technické výpočty jsou *Matlab*, jeho open-source implementace *Octave*, dále je

možno použít např. systém *Macsyma*, nebo další komerční systémy jako je *Mathematica*, či *Maple*.

My se omezíme na implementaci za použití systému *Octave*, který je zdarma ke stažení na adrese www.octave.org. Výhodou tohoto jazyka je zejména jeho téměř stoprocentní kompatibilita s *Matlabem*, i když těch sto procent je diskutabilních. Programovací styl použitý v příkladech je volen tak, aby byl co nejnázornější, nikoli nejefektivnější, či nejpohodlnější. Pro názornost to určitě postačí.

Vezměme jednoduchý příklad z mechaniky prutových konstrukcí. Příhradovina složená ze tří prutů je namáhána jedinou šikmou silou dle obrázku. Pomocí průsečné metody, či styčnickové metody spočítáme normálové síly v jednotlivých prutech a z podmínek rovnováhy reakce ve vnějších vazbách. Výsledné síly jsou následující: reakce $A_x = -35.255\text{kN}$, $A_y = -48.296\text{kN}$ a $B_y = 12.941\text{kN}$ a osově síly v prutech $S_1 = +7.471\text{kN}$, $S_2 = -14.953\text{kN}$ a $S_3 = +55.768\text{kN}$. Výsledky zkontrolujeme pomocí MKP, kde z posunutí jednotlivých uzlových bodů spočítáme tyto odvozené veličiny.



Obrázek 5.9: Příhradová konstrukce zatížená šikmou silou

5.8.1 Matice tuhosti elementu

Jako první bude potřeba vypočítat matici tuhosti taženého-tlačeného prutu v globálních souřadnicích. Za tímto účelem byla navržena funkce *TrussStiffnesMatrix.m*, která vrací jako výsledek matici tuhosti elementu řádu 4×4 . Implementace je velmi názorná:

```
function k = TrussStiffnesMatrix (E, A, x1, y1, x2, y2)
    dx=abs(x2-x1);
    dy=abs(y2-y1);
    L=sqrt(dx^2+dy^2);
    c=dx/L;
    s=dy/L;
    k = (E*A/L)*[ [ c^2, c*s, -c^2, -c*s],
                  [ c*s, s^2, -s*c, -s^2],
                  [ -c^2, -s*c, c^2, s*c],
                  [ -s*c, -s^2, s*c, s^2]];
endfunction
```

Funkce tedy pro zadané souřadnice prvku x vrací matici tuhosti elementu již v globálních souřadnicích. Matice tuhosti elementů č. 1, 2, 3 vypočítáme pomocí volání této funkce ve tvaru:

```
k1 = TrussStiffnesMatrix (2.1e11, 1/12*80*150^3, 0, 0, 10, 0);
k2 = TrussStiffnesMatrix (2.1e11, 1/12*60*120^3, 10, 0, 5, 10*sin(60*pi/180));
k3 = TrussStiffnesMatrix (2.1e11, 1/12*60*120^3, 5, 10*sin(60*pi/180), 0, 0);
```

Tvar matice tuhosti elementu č. 3 (šikmý prut) zkontrolujeme pomocí (matice musí být symetrická dle hl. diagonály):

```
octave:4> k3
k3 =
  4.9497e+05  4.9497e+05 -4.9497e+05 -4.9497e+05
  4.9497e+05  4.9497e+05 -4.9497e+05 -4.9497e+05
 -4.9497e+05 -4.9497e+05  4.9497e+05  4.9497e+05
 -4.9497e+05 -4.9497e+05  4.9497e+05  4.9497e+05
```

Pomocí funkce *MergeKeIntoK.m* budeme nyní sestavovat matici tuhosti celého konstrukce (globální matici tuhosti). Toto provedeme tak,

```
function K_glob = MergeKeIntoK(i,j,k,l,K_loc,K_glob)
    ii=0;
    list=[i,j,k,l];
    for i=list
        jj=0;
        ii+=1;
        for j=list
            jj+=1;
            K_glob(i,j)+=K_loc(ii,jj);
        endfor
    endfor
endfunction
```

Před vlastní sestavováním globální matice tuhosti je třeba tuto inicializovat. Toto provedeme pomocí nulové matice:

```
k=zeros(6,6);
```

Tento příkaz vytvoří nulovou matici k velikosti $(6, 6)$, do které budeme postupně načítat matice tuhosti jednotlivých elementů:

```
k=MergeKeIntoK (1,2,3,4,k1,k);
k=MergeKeIntoK (3,4,5,6,k2,k);
k=MergeKeIntoK (1,2,5,6,k3,k);
```

Nyní nadefinujeme funkci *ApplyBCs*, která bude mít za úkol aplikování okrajových podmínek (zatím pouze nulová posunutí). Toto provedeme modifikací globální matice tuhosti k . Nyní ovšem nebudeme moci použít postupu popsaného v odstavci 5.6, ale použijeme postupu následujícího: "vyškrtneme" opět odpovídající řádky a sloupce matice odpovídající nulovým posunutím. Tímto by ovšem matice tuhosti celé konstrukce byla singulární, pro zachování regulární matice je potřeba místo diagonálních prvků k_{ii} nastat jedničky; k tomu nám poslouží následující procedura:

```
function K_mod = ApplyBCs (which,K_glob)
for i=which
for j=1:rows(K_glob)
K_glob(i,j)=K_glob(j,i)=0.0;
if (i==j)
K_glob(i,j)=1.0;
endif
endfor
endfor
K_mod=K_glob;
endfunction
```

Proceduru zavoláme pomocí

```
k_mod=ApplyBCs([1,2,4],k);
```

Nyní matice k_mod obsahuje globální matici tuhosti celé konstrukce v globálním souřadném systému s eliminovanými řádky a sloupci, které odpovídají nulovým posunutím v globálním souřadném systému. Globální vektor posunutí r získáme řešením lineární soustavy algebraických rovnic $Kr = f$, kde f je globální vektor zatížení. Globální vektor zatížení bude mít tvar:

```
f=[0,0,0,0,50*sin(45*pi/180),50*cos(45*pi/180)]
```

Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic lze v systému *octave* získat jednoduše pomocí součinu inverzní matice k_mod^{-1} a transponovaného vektoru zatížení f^T , tedy pomocí následujícího kódu:

```
r=inverse(k_mod)*f'
```

Vektor r nyní obsahuje výsledná posunutí uzlových bodů. Pro náš příklad dostaneme:

$$r^T = \{0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, -1.04706, 0.60452\}$$

Posledním krokem je tzv. *postprocessing*, t.j. výpočet odvozených veličin, v našem případě se bude jednat o deformace, napětí a normálové síly v jednotlivých prutech konstrukce. Za tímto účelem lze použít následující procedury:

```
function n_force = GetIntForces (E, A, x1, y1, x2, y2, u)
dx=abs(x2-x1);
dy=abs(y2-y1);
L=sqrt(dx^2+dy^2);
c=dx/L;
s=dy/L;
# ind=reverse_index(???) -> mapovani ix, iy, jx, jy na glob. vektor;
# mozna volat funkci rovnou s u_elem, pocitany predem v lokal. s.s.
u_elem = [ c*u[ix]+s*u[iy], -s*u[ix]+c*u[iy], c*u[jx]+s*u[jy], -s*u[jx]+c*u[jy]
e_elem = (u_elem[3]-u_elem[1])/L;
n_force = E*A*e_elem;
endfunction
```

Vektor deformace (t.j. normálové deformace (protažení) jednotlivých prutů) lze vypočítat pomocí rozdílu uzlových posunutí dělených délkou prutu $\varepsilon(x) = \frac{u_i - u_j}{l}$ a číselně nám vyjde:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} 2.9647e-06 \\ -9.8829e-06 \\ 3.6884e-05 \end{Bmatrix}$$

Z vektoru deformace lze snadno spočítat vektor napětí σ , v našem případě taženého-tlačeného prutu se jedná o normálová napětí v jednotlivých prutech, která lze spočítat pomocí Hookova zákona $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 0.62258 \\ -2.0754 \\ 7.7456 \end{Bmatrix}$$

Normálové síly v jednotlivých prutech snadno získáme pomocí vztahu $N(x) = \int_{(A)} \sigma(x) dA$, v našem případě prismatického prutu vynásobením normálového napětí průřezovou plochou jednotlivých prutů; číselně:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 7.471 \\ -14.943 \\ 55.768 \end{Bmatrix}$$

Kapitola 6

Variační principy

Přibližné metody používané v klasické mechanice (ale nejen v mechanice):

- *klasické variační metody*: zejména Ritzova metoda. Tyto metody pracují s pozloupanostmi tzv. *bázových funkcí*, které jsou různé od nuly téměř všude na celé vyšetřované oblasti Ω .
- *metoda sítí*: dnes již také klasická metoda, svého času používaná na řešení desek. Jedná se v podstatě o ...
- *metoda konečných prvků*: jedná se vlastně o zobecněnou variantu Ritzovy metody, kdy bázové funkce jsou různé od nuly pouze v některých prvcích. Výhodou metody oproti klasické Ritzově je její nezávislost na tvaru zkoumané oblasti Ω a snadná definice okrajových podmínek. Rovněž matice výsledné soustavy má výrazně pásový charakter, což usnadňuje řešení (resp. umožňuje použití spec. metod).

Princip variačního počtu - mezi funkcemi určitých vlastností najít takovou funkci, pro kterou daný integrál (který je závislý na dané funkci a jejích derivacích) nabývá extrémní hodnoty. Hledané funkci se říká *extremála*.

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx = \begin{cases} \text{max} \\ \text{min} \end{cases} \quad (6.1)$$

přípustné (konkurenční) funkce

Lagrange - diferenciál

totální diferenciál

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla^T f \cdot h \quad (6.2)$$

kde ∇f (operátor nabra) - gradient funkce $f(x)$

variací funkce - velmi malý přírůstek funkce

variací v mechanice $u(x), \varepsilon(x), p(x), \sigma(x)$ - tyto potom nazýváme *virtuální* posuny, deformace, zatížení, napětí.

Lze ukázat odvození matice tuhosti prvku pomocí variačních principů mechaniky (princip minima potenciální energie, (PV posunutí, PV síl), Hellinger-Reissner, modifikované variační principy...)

Pro úplnost připomeňme nezbytné pojmy z klasické mechaniky (či teorie pružnosti), se kterými budeme pracovat. Jedná se zejména o pojmy:

6.1 Funkcionál celkové potenciální energie

V klasické Ritzově metodě se hledaná funkce, v našem případě funkce průhybu $w(x)$ aproximuje pomocí lineární kombinace bázových funkcí w_i . Úkolem je najít funkci průhybu $w(x)$, která vyhovuje diferenciální rovnici - v našem případě diferenciální rovnici ohybové čáry prutu:

$$-EIw'' = M(x) \quad (6.3)$$

Hledanou funkci $w(x)$ aproximujeme tedy lineární kombinací bázových funkcí ψ_i :

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \quad (6.4)$$

Bázové funkce ψ_i volíme tak, aby vyhovovaly okrajovým podmínkám a neznámé koeficienty a_i určíme pomocí minimalizace funkcionálu. V našem případě budeme minimalizovat potenciální energii Π , tedy budeme hledat její parciální derivace podle neznámých koeficientů a_i :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \quad (6.5)$$

$$\vdots \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0$$

Minimalizace potenciální energie tedy vede k řešení soustavy n rovnic o n neznámých 6.5. Více bude zřejmé na příkladu, zopakujme však nejdříve některé nutné pojmy z klasické teorie pružnosti. Budeme pracovat s pojmy jako deformační energie, práce vnějších sil a diferenciální rovnice ohybové čáry.

6.1.1 Vnitřní (deformační) energie při tahu tlaku

Předpoklad: lineární izotropní materiál (samozřejmě homogenní). Hustota deformační energie λ (plocha pod křivkou v diagramu $\sigma - \varepsilon$) je u lineárního materiálu zřejmé:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (6.7)$$

navíc pro elastický materiál platí Hookův zákon:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6.8)$$

Pouze připomeňme, že normálové napětí při tahu (tlaku) je rovno $\sigma = \frac{N(x)}{A(x)}$.

Potom celková deformační energie naakumulovaná v deformovaném objemu V se dá vyjádřit dvěma rovnocennými integrálními vztahy:

$$U = \int_{(V)} \lambda dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_0^l \int_{(A)} \frac{\sigma^2}{2E} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\sigma^2}{EA} dx \quad (6.9)$$

$$U = \int_{(V)} \lambda dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_0^l \int_{(A)} \frac{E \varepsilon^2}{2} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA \varepsilon^2 dx \quad (6.10)$$

Při použití prvního z nich a dosazení výrazu pro normálové napětí při tahu/tlaku:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (6.11)$$

snadno dospějeme k výrazu:

$$U = \int_0^l \int_{(A)} \frac{N^2}{2EA^2} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(x)}{EA} dx$$

6.1.2 Vnitřní (deformační) energie při ohybu

Opět předpokládáme lineární izotropní materiál. Při odvozování výrazu pro deformační energii se změni pouze výraz pro normálové napětí při ohybu. To je při tomto namáhání dáno pomocí:

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (6.12)$$

Potom můžeme psát:

$$U = \int_{(V)} \lambda dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_0^l \int_{(A)} \frac{\sigma^2}{2E} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dA dx \quad (6.13)$$

Výraz $\int_{(A)} y^2 dA$ je zřejmě výraz pro moment setrvačnosti, tudíž lze výraz 6.13 zjednodušit na výsledný

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx \quad (6.14)$$

6.1.3 Vnitřní (deformační) energie při kroucení

Předpoklady zůstávají stejné, pouze se mění zatížení. Prizmatický prut je namáhán kroučícím momentem M_k . Při kroucení vzniká smykové napětí, které je dáno pomocí:

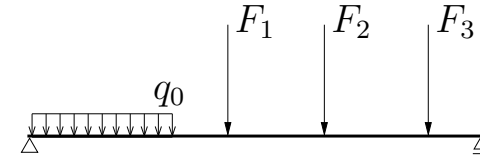
$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho \quad (6.15)$$

kde I_p polární moment setrvačnosti průřezu (např. pro plný kruh je $I_p = \frac{1}{2} \pi r^4$) a ρ je vzdálenost vyšetřovaných vláken od středu (polární souřadnice, poloměr). Deformační energii určíme opět integrací hustoty deformační energie pře celý objem:

$$U = \int_{(V)} \lambda dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \int_{(V)} \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^l \int_{(A)} \frac{M_k^2}{2GI_p^2} \rho^2 dA dx \quad (6.16)$$

Výraz $\int_{(A)} \rho^2 dA$ je polární moment setrvačnosti I_p , opět lze zkrátit na výsledný:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_k^2(x)}{GI_p} dx$$



Obrázek 6.1: Ohýbaný nosník

6.1.4 Vnější energie

Mějme nosník namáhaný pouze ohybem. Zatížení sestává z osamělých břemen $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ a spojitého zatížení $q(x)$.

- spojitě zatížení $q(x)$
- silové zatížení (osamělá břemena) F_i

práce vnějších sil (osamělých břemen a spojitěho zatížení) je potom:

$$W = \sum_{i=1}^n F_i w_i + \int_0^l q(x) w(x) dx \quad (6.17)$$

6.1.5 Celková potenciální energie prutu

Celková potenciální energie je dána rozdílem deformační energie vnitřních sil (napětí) a energie vnějších sil (práce zatížení).

$$\Pi = U - W \quad (6.18)$$

Pro náš problém ohybaného prutu dostáváme pro potenciální energii výraz:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx - \sum_{i=1}^n F_i w_i - \int_0^l q(x) w(x) dx \quad (6.19)$$

Pomocí variačního principu hledáme funkci průhybu $w(x)$ pomocí minimalizace potenciální energie Π . Mezi klasické variační principy mechaniky patří Lagrangeův variační princip (vede na princip virtuálních posunutí) a Castiglianův variační princip (vede na princip virtuálních sil).

6.2 Lagrangeův a Castiglianův variační princip

Lagrangeův variační princip Při variaci složek posunutí, splňujících geometrické podmínky uvnitř oblasti Ω i na její hranici Γ , je variace potenciální energie systému nulová.

Důsledkem Lagrangeova variačního principu je věta o minimu potenciální energie systému, která říká:

Věta o minimu potenciální energie Ze všech kinematically přípustných stavů (t.j. stavů které vyhovují okrajovým podmínkám, např. podepření prutu) $u(x)$ nastane ten, pro který je nabývá potenciální energie minimální hodnoty. To znamená, že *funkcionál je stacionární*.

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (6.20)$$

Duálním principem k Lagrangeově variačnímu principu je Castiglianův variační princip. Tento vede k větě o minimu komplementární (doplňkové) energie a slovy se dá vyjádřit takto:

Castiglianův variační princip Při variaci složek sil a napětí, splňujících statické podmínky rovnováhy uvnitř tělesa Ω i na jeho hranici Γ , je variace doplňkové energie systému nulová.

Důsledkem Castiglianova variačního principu je věta o minimu komplementární energie:

Věta o minimu doplňkové energie Ze všech možných stavů napětí pružného tělesa, které vyhovují podmínkám rovnováhy uvnitř i na hranici tělesa, nastane právě ten, pro který doplňková energie systému nabývá minimální hodnoty.

6.3 Ritzova metoda

Metoda, která řeší tvar ohybové čáry právě pomocí Lagrangeova variačního principu se nazývá Ritzova metoda. Tato metoda řeší úlohy pružnosti energeticky (nalezení průhybové čáry nosníku). Výsledné řešení je přibližné, ale s dosažením požadované přesnosti. Přesnost záleží na volbě aproximace ohybové čáry, tedy na volbě bázevých funkcí $w_i(x)$.

Postup: Neznámou funkci průhybu $w(x)$ aproximujeme pomocí bázevých funkcí ψ , častěji pomocí posloupnosti funkcí ψ_i :

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \quad (6.21)$$

Bázevých funkcí ψ_i volíme tak, aby splňovaly okrajové podmínky na hranici Γ a neznámé koeficienty a_i určíme z podmínek minima potenciální energie:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = \frac{\partial(E_{ext} + E_{int})}{\partial a_i} = \frac{\partial(U - W)}{\partial a_i} = 0 \quad (6.22)$$

Nejjednodušší bude popsat algoritmus Ritzovy metody na jednoduchém příkladu hledání průhybové čáry nosníku.

Příklad Pomocí Ritzovy metody stanovte maximální průhyb konzoly délky l , ohybové tuhosti EI zatížené na volném konci osamělým břemenem F .

Řešení nalezneme postupně ve dvou krocích. Nejprve volme bázevou funkci co nejjednodušší, řekněme jako kvadratickou funkci (budeme potřebovat spojitou druhou derivaci):

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i = a_1 x^2$$

Sestrojíme funkcionál potenciální energie jako rozdíl práce vnějších sil a deformační energie vnitřních sil:

$$\begin{aligned} \Pi &= E_e + E_i = W - U = \frac{EI}{2} \int_0^l (w''(x))^2 dx - Fw \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l 4a_1^2 dx - Fa_1 l^2 = \frac{EI}{2} 4a_1^2 l - Fa_1 l^2 \end{aligned}$$

Nyní hledáme extrém Π vzhledem k hledanému parametru a_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= 4EIla_1 - Fl^2 = 0 \\ a_1 &= \frac{Fl^2}{4EI} = \frac{Fl}{4EI} \end{aligned}$$

Hledaná funkce průhybu je tedy:

$$w(x) = \frac{Fl}{4EI} x^2$$

Tento výsledek dává oproti přesné hodnotě maximálního průhybu $w_{max} = \frac{Fl^3}{3EI}$ 25% chybu, pokusme se tedy výsledek zpřesnit použitím lépe zvolené bázevých funkcí. Hledejme tedy tentokrát průhyb jako lineární kombinaci za použitím pouhých dvou členů, např. za použití snadno derivovatelných mocninných funkcí:

$$w(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$

Opět sestrojíme funkcionál Π (druhá derivace $w''(x) = 2a_1 + 6a_2 x$):

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EI}{2} \int_0^l (4a_1^2 + 24a_1 a_2 x + 36a_2^2 x^2) dx - Fa_1 l^2 - Fa_2 l^3 \\ &= \frac{EI}{2} (4a_1^2 l + 12a_1 a_2 l^2 + 12a_2^2 l^3) - Fa_1 l^2 - Fa_2 l^3 \end{aligned}$$

Parciální derivace Π podle všech hledaných parametrů mají být nulové:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= \frac{EI}{2} (8la_1 + 12a_2 l^2) - Fl^2 = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} &= \frac{EI}{2} (12a_1 l^2 + 24a_2 l^3) - Fl^3 = 0 \end{aligned}$$

Řešení těchto dvou rovnic dává hodnoty pro parametry $a_1 = \frac{Fl}{3EI}$ a $a_2 = -\frac{F}{6EI}$. Dosazením a_1, a_2 do rovnice průhybu, získáme hledané řešení ohybové čáry:

$$w(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 = \frac{Fl}{2EI} x^2 - \frac{F}{6EI} x^3$$

Toto řešení nám již dává pro hodnotu maximálního průhybu zcela přesnou hodnotu:

$$w_{max} = w(l) = \frac{Fl^3}{2EI} - \frac{Fl^3}{6EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

6.4 Princip virtuálních prací

Z Lagrangeova variačního principu minima potenciální energie vyplývá deformační metoda, obecně známá metoda pro výpočet staticky neurčitých konstrukcí. Užití Castiglianova variačního principu minima doplňkové energie vede zase k silové metodě. Oba principy vycházejí z obecně platného *principu virtuální práce* (PVP).

V mechanice jsme byli zvyklí rozdělovat PVP na na *princip virtuálních posunutí* (PVP) a *princip virtuálních sil* (PVS), dle toho, kterou z veličin považujeme za *virtuální*, tedy myšlenou, nekonečně malé hodnoty.

Stručně se tedy pro PVS dá zapsat:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta F_i r_i + \sum_{j=1}^m \delta M_j \phi_j \quad (6.23)$$

nebo, v případě PVP:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta r_i + \sum_{j=1}^m M_j \delta \phi_j \quad (6.24)$$

Princip virtuálních prací zjednodušeně praví: “Je-li těleso v rovnováze, virtuální práce vnitřních sil se rovná virtuální práci vnějších sil. Vnitřní síly budou v případě statické analýzy napětí, vnější síly zatížení. Pro sestavení rovnice vyjadřující virtuální práci je dobré si uvědomit, že napětí “pracují” na deformacích, síly “pracují” na posunutích a momenty “pracují” na pootočeních. Podmínka rovnosti virtuálních prací vnějších a vnitřních sil se pak jednoduše запиše takto:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV &= \int_0^l \{\delta u\}^T \{q_x\} dx + \{\delta r\}^T \{R\} \\ \int_{(V)} ([B]^T \{\delta r\})^T E [B] \{r\} dV &= \int_0^l ([N] \{\delta r\})^T \{q_x\} dx + \{\delta r\}^T \{R\} \\ \underbrace{\{\delta r\}^T \int_{(V)} [B]^T E [B] dV \{r\}}_{[K]} &= \underbrace{\{\delta r\} \left(\int_0^l [N]^T \{q_x\} dx + \{R\} \right)}_{\{f\}} \\ \{K\} \{r\} &= \{f\} \quad \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi vektorem koncových sil na prutu \mathbf{f} a vektorem koncových posunutí \mathbf{r} . Tyto jsou mezi sebou svázány pomocí matice \mathbf{K} , tedy *matice tuhosti* elementu. V našem případě taženého-tlačeného prvku platí, že jeho matice tuhosti je:

$$K = \int_{(V)} [B]^T E [B] dV = \int_0^l \int_{(A)} [B]^T E [B] dA dx = \int_0^l [B]^T EA [B] dx \quad (6.26)$$

Vzpomeňme, že EA je normálová tuhost prutu. Malinko předběhneme a dodejme, že později při odvozování matice tuhosti pro jiný prvek dojdeme k obdobnému zápisu, například pro případ ohýbaného prutu bude matice tuhosti:

$$K = \int_0^l [B]^T EI [B] dx \quad (6.27)$$

kde součin EI je ohybová tuhost prutu. Postupně bude možno způsob sestavení matice tuhosti elementu zobecnit a dojdeme k obecnému způsobu vyjádření matice tuhosti elementu:

$$K = \int_{(\Omega)} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (6.28)$$

kde Ω bude integrační oblast, tedy oblast celého elementu (délka, plocha, objem) a matice $[D]$ bude matice materiálové tuhosti. O tom ale více v následujících kapitolách.

Kapitola 7

Tažený-tlačený prut

7.1 Variační formulace I (x)

Pokusme se tedy nyní o odvození matice tuhosti elementu pro tažený-tlačený prvek pomocí principu virtuálních prací. Tažený-tlačený prut je v rovině dán pomocí souřadnic dvou uzlových bodů. V každém uzlovém bodu i a j definujeme pouze jedno koncové posunutí u_i a u_j . Pro tažený-tlačený prvek platí je tedy vektor koncových posunutí:

$$r = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

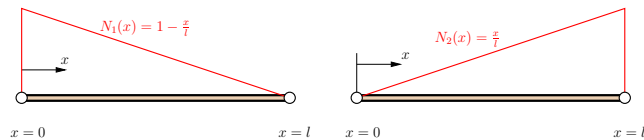
Pomocí těchto koncových posunutí a matice báze funkcí je aproximováno libovolné posunutí uvnitř prvku, tedy posunutí $u(x)$:

$$u(x) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

ve zkráceném zápisu

$$u(x) = [N]\{r\} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{r} \quad (7.3)$$

Hledáme tedy báze funkce N_i , pomocí kterých budeme aproximovat libovolné posunutí $u(x)$ ze známých koncových posunutí $\{u_i \quad u_j\}^T$.



Obrázek 7.1: Báze funkce taženého-tlačeného prutu na intervalu $\langle 0, l \rangle$

Z obrázku 7.1 je zřejmé, že posunutí v místě x prutu se dá vyjádřit pomocí posunutí uzlových bodů jako:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_j \quad (7.4)$$

Matice báze funkcí pro tažený-tlačený prut bude mít tedy tvar:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Abychom mohli vyjádřit deformační energii prutu ($U = \int_{(V)} \frac{E\varepsilon^2}{2} dV$), budeme potřebovat vyjádřit vektor deformace pomocí koncových posunutí:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d[N]}{dx}\{r\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

$$\varepsilon(x) = [B]\{r\} \quad \varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{r} \quad (7.7)$$

Pro případ lineárního izotropního materiálu bude vektor napětí:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = E(\varepsilon_x - \varepsilon_{x0}) = E([B]\{r\} - \varepsilon_{x0}) \quad (7.8)$$

kde ε_{x0} je vektor počátečních deformací, např. od teplotních změn $\varepsilon_{x0} = \Delta l/l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l/l = \alpha \Delta t$

Použijme pro náš tažený-tlačený prvek Lagrangeova principu minima potenciální energie. K sestavení funkcionálu Π budeme potřebovat výrazy pro vnitřní energii a pro potenciální energii vnějších sil. Vnitřní (deformační) energii prutu můžeme zapsat pomocí hustoty deformační energie (energie naakumulované v jednotce objemu dokonale pružného materiálu stlačeného působením vnějších sil) λ :

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \int_{(V)} \lambda dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon^T EA \varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^l r^T B^T EA B r dx = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} & u_j^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} & u_j^{(e)} \end{bmatrix} \underbrace{EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[K]^{(e)}} dx \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r^{(e)} \right\}^{(T)} K^{(e)} r^{(e)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Tažený-tlačený prut je zatížen pouze spojitým zatížením $q(x)$ působícím shodně s podélnou osou prutu. Práce vykonaná těmito vnějšími silami je:

$$\begin{aligned} W^{(e)} &= \int_0^l q(x)u(x) dx = \int_0^l q N^T r^{(e)} dx = \left(r^{(e)} \right)^T \int_0^l q \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = \\ &= \left(r^{(e)} \right)^T f^{(e)} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Potenciální energie je rozdíl vnitřní (deformační) energie a práce vnějších sil (zatížení):

$$\Pi^{(e)} = U^{(e)} - W^{(e)} = \frac{1}{2} \left(r^{(e)} \right)^T K r^{(e)} - \left(r^{(e)} \right)^T f^{(e)} \quad (7.11)$$

Princip minima potenciální energie nám říká, že při zatížení vnějšími silami zaujme prut takovou polohu, při které nabyde jeho potenciální energie minimální hodnoty:

$$(\delta r)^T \frac{\partial \Pi}{\partial r} = (\delta r)^T [K^{(e)} r^{(e)} - f^{(e)}] = 0 \implies K^{(e)} r^{(e)} = f^{(e)} \quad (7.12)$$

Matrice tuhosti taženého-tlačeného prvku je tedy:

$$[K]^{(e)} = \int_0^l \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \quad (7.13)$$

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

a vektor transformovaného (zobecněného zatížení):

$$f^{(e)} = \int_0^l q N^T dx = \int_0^l q \left[1 - \frac{x}{l} \right] dx = q \left[x - \frac{x^2}{2l} \right]_{x=0}^{x=l} = \left[\frac{ql}{2} \right] \quad (7.15)$$

Rovnice 7.11 a 7.12 vyjadřují důležité vztahy, které použijeme i dále v tomto textu, zapíšeme si je raději ještě jednou přehledněji, tedy bez indexů ^(e) označujících, že se jedná o zápis platící pro prvek:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} r^T K r - r^T f \\ K r &= f \end{aligned} \quad (7.16)$$

7.2 Variační formulace II (ξ)

Pro úplnost ještě odvodíme matici tuhosti taženého-tlačeného prutu pomocí básových funkcí volených na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ namísto intervalu $\langle 0, l \rangle$. Postup se nám bude hodit později u básových funkcí složitějších elementů. Výhodné je totiž (zejména z hlediska numerické integrace) volit právě interval jednotkový. Postup si můžeme ukázat například pomocí transformace intervalu $\langle 0, l \rangle$ na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Básových funkce N_1 a N_2 přejdou ve tvar:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi \\ N_2 &= \xi \end{aligned}$$

Při integraci nesmíme zapomenout na Jacobián transformace J . Souřadnice vyjádřené v jednotlivých souřadných systémech jsou svázány pomocí vztahu:

$$\xi = \frac{x}{l}$$

Jacobián transformace bude tedy mít tvar:

$$J = \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l}$$

Nyní je už velmi snadné vyjádřit matici tuhosti taženého-tlačeného prutu:

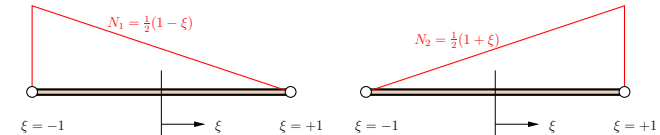
$$\begin{aligned} K &= \int B^T D B d\Omega = \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l} d\xi = \\ &= \frac{EA}{l} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \xi & -\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix}_0^1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pro úplnost ještě doplníme odvození matice tuhosti taženého-tlačeného prutu pomocí přirozených souřadnic. Více se přirozenými souřadnicemi budeme věnovat ve zvláštní kapitole, nyní si jenom stručně ukážeme postup. Přirozené souřadnice se volí tak, že jejich hodnota v uzlových bodech elementu nabývá hodnot $+1$ a -1 . Pro případ taženého-tlačeného prutu musíme tedy provést transformaci souřadnic z intervalu $\langle 0; l \rangle$ na interval $\langle -1; +1 \rangle$. Hledáme tedy lineární funkci ξ ve tvaru: $\xi = ax + b$. Tato funkce musí splňovat následující podmínky: $\xi(x=0) = -1$ a $\xi(x=l) = 1$. Z těchto podmínek vyjde: $b = -1$ a $a = \frac{2}{l}$. Hledanou transformaci lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\xi = \frac{2}{l}x - 1$$

Nyní odvodíme lineární básových funkce N_1 a N_2 , pomocí kterých budeme aproximovat posunutí po prutu (nyní místo na intervalu $\langle 0; l \rangle$ na intervalu $\langle -1; +1 \rangle$). Pomocí obrázku 7.2 snadno nahlédneme, že hledané funkce budou mít tento tvar:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned}$$



Obrázek 7.2: Básových funkce taženého-tlačeného prutu na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$

Nyní sestavíme matici tuhosti prvku pomocí výrazu $K = \int_{(\Omega)} B^T D B d\Omega$. K tomuto budeme potřebovat matici B , kterou získáme derivací básových funkcí podle přirozené souřadnice ξ :

$$B = \frac{dN}{d\xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jacobián transformace bude:

$$J = \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}$$

Potom matice tuhosti nabyde již známého tvaru:

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{2}{l} d\xi = \\ &= \frac{2EA}{l} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} d\xi = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kapitola 8

Ohýbaný prut (PLANE BEAM ELEMENT)

V první části mechaniky (statika) se zabýváme statickou analýzou konstrukcí a její velká část je věnována průběhům vnitřních sil prutových konstrukcí. Nejčastějším úkolem je tedy stanovit průběh vnitřních sil (normálové $N(x)$ posouvající $T(x)$ a ohybového $M(x)$, popř. kroutícího momentu $M_x(x)$).

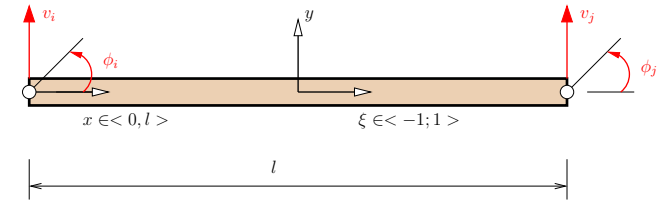
Pro odvození základních vztahů mezi geometrickými veličinami budeme vycházet ze dvou teorií. První teorii budeme nazývat *Euler-Bernoulliho* která se rovněž nazývá *klasická*, či *inženýrská*. Tato teorie předpokládá, že průřez prutu zůstává i po deformaci rovinný a je *kolmý k deformované střednici prutu*. Tato teorie je platná pro štíhlé pruty (štíhlost prutu je poměr délky a průřezové plochy).

Druhá teorie bývá nejčastěji nazývána *Timošenkova* a stejně jako Euler-Bernoulliho teorie předpokládá zachování rovinnosti příčného řezu, avšak tento již *není po zatížení prutu kolmý k deformované střednici*. Timošenkova teorie nezanedbává vliv smyku na deformaci příčného řezu a je důležitá pro ohyb masivních nosníků.

V následujícím odstavci odvodíme tedy matici tuhosti ohýbaného prutu založeného na Euler-Bernoulliho teorii, t.j. s těmito předpoklady:

- *rovinná symetrie*: existuje podélná rovina symetrie, podle níž je nejen příčný řez prutu, ale i působící zatížení symetrické. Z této symetrie vyplývá i symetrie vnitřních sil podél stejné roviny.
- *proměnlivost příčného řezu*: příčný řez prutu je po délce prutu neměnný, nebo je dán hladkou funkcí $A(x)$. My budeme v následujících úvahách považovat prut za *prismatický*, t.j. bude platit: $dA(x)/dx = 0$.
- *kolmost příčných řezů*: řezy zůstávají po deformaci rovinné a kolmé k deformované střednici prutu (tenké pruty, u masivních prutů je nutno brát v úvahu vliv posouvající síly a Timošenkovu teorii).
- *deformační energie*: na deformační energii prutu má vliv pouze ohybový moment, vliv posouvající síly je v energetické bilanci zanedbán.
- *linearizace*: počítáme pouze s teorií prvního řádu, t.j. deformace jsou dostatečně malé. Viz teorie infinitesimálních deformací, teorie prvního řádu.
- *elastické (pružné) chování materiálu*: materiál prutu považujeme za lineární izotropní a homogenní.

Uvažujme prizmatický prut délky l který je namáhán pouze ohybem. V krajních bodech prutu definujeme dvě uzlové neznámé – posunutí u_i (resp. u_j) a pootočení příčného řezu ϕ_i (resp. ϕ_j) dle obr. 8.1.



Obrázek 8.1: Uzlové neznámé pro ohýbaný prut

Dle Euler-Bernoulliho hypotézy o zachování kolmosti příčných řezů k deformované střednici prutu, lze posunutí ve směru osy x vyjádřit pouze jako funkci vzdálenosti od normálové osy y a úhlu pootočení příčného řezu ϕ . To je důvod, proč na prvku neuvažujeme posunutí ve směru osy x jako neznámou a můžeme psát následující geometrické vztahy:

vektor posunutí:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -yv' \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y\phi \\ v(x) \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

Při ohybu bude vznikat pouze deformace ε_x . Vektor deformace bude mít tedy pouze jednu složku ε_x , index x tedy vynecháme a zapíšeme:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y\kappa \quad (8.2)$$

kde $\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2}$ je *křivost* prutu.

vektor napětí:

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey \frac{d^2 v}{dx^2} = -Ey\kappa \quad (8.3)$$

ohybový moment:

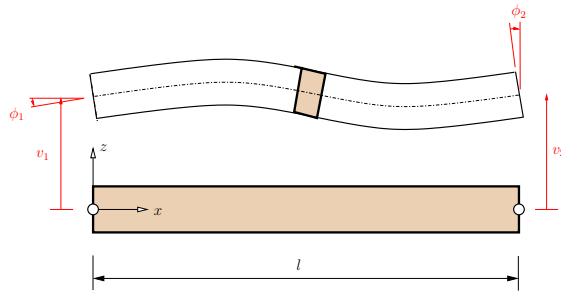
$$M = \int_{(A)} -y\sigma dx = E \frac{d^2 v}{dx^2} \int_{(A)} y^2 dA = EI\kappa \quad (8.4)$$

8.1 Ohýbaný prut (Euler-Bernoulli)

Nyní odvodíme matici tuhosti ohýbaného prutu. Prut má dva uzlové body, v každém z nich dvě deformační neznámé - $v_{i,j}$ posunutí ve směru osy y , $\phi_{i,j}$ - pootočení koncových průřezů (obr. 8.2).

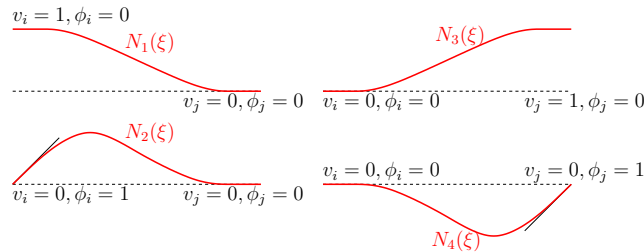
Posunutí libovolného místa prutu určíme pomocí matice bázevých (tvarových, SHAPE FUNCTIONS) funkcí $[N]$ a vektoru koncových posunutí prutu $\{r\}$:

$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = [N]\{r\}^{(e)} \quad (8.5)$$



Obrázek 8.2: Euler-Bernoulliho ohýbaný prut - geometrické vztahy

bázové funkce N_i napíšeme opět pomocí *přirozené souřadnice* $\xi = \frac{2x}{l} - 1$. Připomeňme, že přirozená souřadnice má hodnotu -1 pro $x = 0$ a hodnotu 1 pro $x = l$. Tvar bázových funkcí pro ohýbaný prut je na obrázku 8.3 a odvodíme si je pomocí následující úvahy. Dle jejich průběhu je zřejmé, že je lze zapsat jako kubické polynomy (viz. inflexní body) a např. první bázovou funkci budeme hledat ve tvaru:



Obrázek 8.3: Bázové (tvarové) funkce ohýbaného prutu

$$N_1(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d$$

Koeficienty a, b, c a d nalezneme pomocí okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} N_1(-1) &= 1 \\ N_1'(-1) &= 0 \\ N_1(+1) &= 0 \\ N_1'(+1) &= 0 \end{aligned}$$

Derivace N_1 dle ξ je rovna $N_1'(\xi) = 3a\xi^2 + 2b\xi + c$, řešíme tedy následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 1 \\ 3a - 2b + c &= 0 \\ a + b + c + d &= 0 \\ 3a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Koeficienty vyjdou: $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = -\frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{2}$. Hledaná bázová funkce je tedy $N_1(\xi) = \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$.

Nyní odvodíme bázovou funkci $N(\xi)$, t.j. bázovou funkci pro případ jednotkového pootočení v uzlu i . Jednotkové pootočení v uzlu i pro interval $(0, l)$ znamená pootočení velikosti $\phi_1 = \frac{l}{2}$ pro interval $(-1, +1)$. Hledáme tedy funkci $N_2(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d$ s následujícími okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} N_2(-1) &= 0 \\ N_2'(-1) &= \frac{l}{2} \\ N_2(+1) &= 0 \\ N_2'(+1) &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme tedy následující soustavu rovnic (nyní již s výhodou maticově, neboť matice levé strany zůstává neměnná):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Koeficienty vyjdou (použijme např. opět *Octave*): $a = \frac{l}{8}$, $b = -\frac{l}{8}$, $c = -\frac{l}{8}$ a $d = \frac{l}{8}$. Funkce $N_2(\xi)$ pro jednotkové pootočení uzlu i má tedy tvar: $N_2(\xi) = \frac{1}{8}l(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) = \frac{1}{8}l(1 - \xi)^2(1 + \xi)$. Zbývající funkce $N_3(\xi)$ a $N_4(\xi)$ ponecháme na čtenáři, uvedeme zde pouze výsledek:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{8}l(1 - \xi)^2(1 + \xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \\ N_4(\xi) &= -\frac{1}{8}l(1 + \xi)^2(1 - \xi) \end{aligned} \quad (8.6)$$

vektor deformace:

$$\varepsilon(x) = -y\kappa = -y \frac{d^2v}{dx^2} = -yN''r = -y \frac{4}{l^2} \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} = -y \frac{4}{l^2} \frac{d^2N(\xi)}{d\xi^2} r = -y[B]\{r\}^{(e)} \quad (8.7)$$

$$\kappa = [B]\{r\} \quad (8.8)$$

Při odvození tohoto vztahu jsme použili pravidlo o derivaci složené funkce. Osvěžme si základní kurz matematiky pomocí následujícího odstavce. Máme funkci $f(x)$ a funkci $\xi = \frac{2x}{l} - 1$. Při derivaci funkce $f(x)$ musíme použít zmíněnou větu o derivaci složené funkce:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{df}{d\xi} \frac{2}{l}$$

Druhá derivace funkce $f(x)$ dle proměnné x tedy bude:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d(\frac{df}{d\xi})}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2f}{d\xi^2} \frac{2}{l} \frac{2}{l} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2f}{d\xi^2}$$

Maticе B tedy bude obsahovat $\frac{4}{l^2}$ násobky druhých derivací bázových funkcí $N_i(\xi)$ dle ξ :

$$[B] = \frac{4}{l^2} \frac{d^2 N}{d\xi^2} = \frac{4}{l^2} \left[\frac{d^2 N_1}{d\xi^2}, \frac{d^2 N_2}{d\xi^2}, \frac{d^2 N_3}{d\xi^2}, \frac{d^2 N_4}{d\xi^2} \right] \quad (8.9)$$

Derivaci 8.6 snadno odvodíme:

$$[B] = \frac{1}{l} \left[6\frac{\xi}{l}, 3\xi - 1, -6\frac{\xi}{l}, 3\xi + 1 \right] \quad (8.10)$$

Matici tuhosti ohýbaného prutu odvodíme podobným způsobem jako u případu taženého-tlačeného prutu z principa minima potenciální energie. Deformační energii ohýbaného prutu lze odvodit pomocí hustoty deformační energie λ , v případě lineárního elastického materiálu bude $\lambda = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$:

$$\begin{aligned} U &= \int_{(V)} \lambda dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma\varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_0^l \int_{(A)} \frac{M^2(x)}{2EI^2} y^2 dA dx = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \\ &= \int_0^l \frac{E^2 I^2 (v'')^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx \end{aligned}$$

Nyní provedme pár úvah ohledně $\kappa = Br$: za prvé, κ je skalár, to znamená, že $\kappa = \kappa^T$:

$$Br = r^T B^T$$

S využitím tohoto vyčíslíme hodnotu κ^2 :

$$\kappa^2 = (Br)^2 = BrBr = r^T B^T r^T B^T = r^T B^T Br$$

S využitím těchto poznatků nyní upravme výraz pro deformační energii ohýbaného prutu:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI r^T B^T Br dx$$

Celková potenciální energie Π bude dána rozdílem deformační energie prutu a práce vnějších sil:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l EI r^T B^T Br dx - \int_0^l qv dx \\ &= \frac{1}{2} r^T \int_0^l B^T EIB dx r - \int_0^l qN r dx \\ &= \frac{1}{2} r^T Kr - r^T f \end{aligned}$$

V tomto nám již známém výrazu je f vektor transformovaného zatížení, který jsme získali těmito úpravami (práce vnějších sil je opět skalár, musí tedy platit $W = W^T$):

$$W = W^T = \left(\int_0^l qN dx r \right)^T = r^T \left(\int_0^l qN dx \right)^T = r^T \int_0^l N^T q^T dx = r^T \int_0^l N^T q dx$$

Celková energie prutu je tedy dána pomocí:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} r^T Kr - r^T f \quad (8.11)$$

kde

$$K = \int_0^l EIB^T B dx = \int_{-1}^1 EIB^T B \frac{1}{2} d\xi \quad (8.12)$$

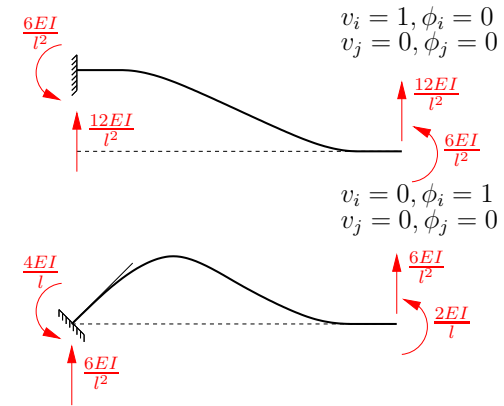
je matice tuhosti ohýbaného prutu a lze ji numericky snadno vyčíslit:

$$\begin{aligned} K^{(e)} &= \frac{1}{2} EI l \int_{-1}^1 \frac{1}{l^2} \begin{Bmatrix} 6\frac{\xi}{l} \\ 3\xi - 1 \\ -6\frac{\xi}{l} \\ 3\xi + 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{l} & 3\xi - 1 & -6\frac{\xi}{l} & 3\xi + 1 \end{bmatrix} d\xi = \\ &= \frac{EI}{2l^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6\xi(3\xi - 1)l & -36\xi^2 & 6\xi(3\xi + 1)l \\ (3\xi - 1)^2 l^2 & -6\xi(3\xi - 1)l & 36\xi^2 & -6\xi(3\xi + 1)l \\ -6\xi(3\xi - 1)l & (9\xi^2 - 1)l^2 & -6\xi(3\xi + 1)l & (3\xi + 1)^2 l^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 4l^2 & -6l & 2l^2 & \\ & 12 & -6l & \\ & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.13)$$

a f je vektor transformovaného zatížení:

$$f = \int_0^l N^T q dx = \frac{1}{2} ql \int_{-1}^1 N^T d\xi = \frac{1}{2} ql \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\ \frac{1}{8}l(1-\xi)^2(1+\xi) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\ -\frac{1}{8}l(1+\xi)^2(1-\xi) \end{bmatrix} d\xi = ql \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l \\ \frac{1}{12}l \\ \frac{1}{2}l \\ -\frac{1}{12}l \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Úkol: ověřte výpočtem hodnoty koncových sil ohýbaného prutu z obr. 8.4, t.j. vypočítejte prvky matice tuhosti ohýbaného prutu přímou metodou. K výpočtu použijte silovou nebo deformační metodu, popř. můžete využít energetického principu.



Obrázek 8.4: Koncové síly ohýbaného prutu

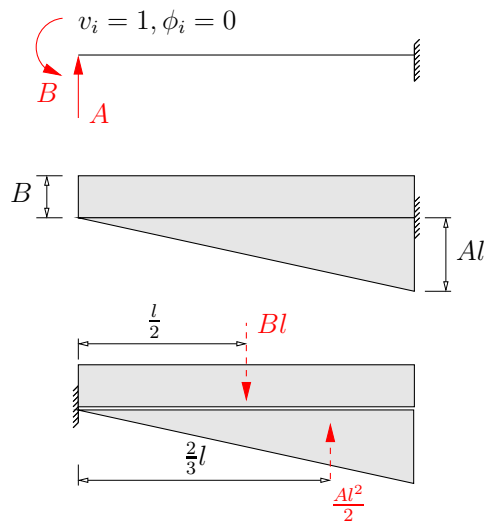
Pro jistotu si toto můžeme provést metodou fiktivního nosníku. Průhyb v libovolném místě nosníku je roven fiktivnímu ohybovému momentu dělenému ohybovou tuhostí nosníku:

$$v(x) = \frac{M_f(x)}{EI}$$

obdobně pootočení je rovno fiktivní posouvající síle dělené ohybovou tuhostí:

$$\phi(x) = \frac{T_f(x)}{EI}$$

Nosník uvolníme dle obrázku 8.5 kde jsou patrné i okrajové podmínky: $v_i = 1$ a $\phi_i = 0$. Tyto použijeme jako okrajové podmínky pro řešení staticky určité konzoly zatížené staticky neurčitými reakcemi z uvolněného vetknutí vlevo.



Obrázek 8.5: Fiktivní nosník - stanovení koncových sil

Fiktivní nosník zatížíme plochou ohybového momentu, stanovíme náhradní břemena (viz. obr. 8.5) a můžeme psát:

$$v(0) = \frac{M_f}{EI} = \frac{1}{EI} \left(-Bl \frac{l}{2} + \frac{Al^2}{2} \frac{2}{3}l \right) = 1$$

$$\phi(0) = \frac{T_f}{EI} = \frac{1}{EI} \left(Bl - \frac{Al^2}{2} \right) = 0$$

Řešením těchto rovnic snadno získáme hodnoty neznámých reakcí A,B:

$$A = \frac{12EI}{l^3}, \quad B = \frac{6EI}{l^2}$$

Zbývající reakce určíme ze svíselé a momentové podmínky rovnováhy na konzole zatížené silami A,B.

Poznámka

Pro úplnost doplníme ve stručné podobě odvození matice tuhosti ohýbaného prutu pomocí básových funkcí $N_i(x)$ definovaných na intervalu $(0; l)$. Básově funkce budeme opět hledat jako kubické polynomy:

$$N_i(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Postupně budeme hledat konstanty A, B, C, D pro případy jednotkového posunutí (pootočení) v uzlech i a j . S využitím některého ze systémů pro řešení úloh numerické algebry (Maple, Mathematica, Maxima) hledáme konstanty A, B, C, D tak, aby funkce $N_i(x)$ vyhovovala okrajovým podmínkám prutu. Pro první básovou funkce $N_1(x)$ máme okrajové podmínky: $N_1(x) = 1, N_1'(x) = 0, N_1(l) = 0$ a $N_1'(l) = 0$. Každá okrajová podmínka představuje jeden řádek matice A . Řešíme tedy soustavu 4 rovnic ve tvaru $Ax = b$, kde matice A bude mít tvar:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & l & 0 \end{bmatrix}$$

a vektor b bude postupně

$$b_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad b_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad b_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad b_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ukažme si použití systému Maxima (aplikace okrajových podmínek: $N_1(0) = 1, N_1'(0) = 0, N_1(l) = 0, N_1'(l) = 0$) pro stanovení koeficientů A, B, C, D první básově funkce $N_1(x)$:

```
(1) A: matrix([0,0,0,1],[0,0,1,0],[l^3,l^2,l,1],[3*l^2,2*l,1,0]);
(% o2)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & l & 0 \end{pmatrix}$ 
(2) b: matrix([1],[0],[0],[0]);
(% o2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
(3) (A^-1) . b;
(% o3)  $\begin{pmatrix} \frac{2}{l^3} \\ -\frac{3}{l^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
(4)
```

První básová funkce $N_1(x)$ pro posunutí $v_i = 1$ je tedy:

$$N_1(x) = \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1$$

Zbývající báze funkce stanovíme postupnou záměnou vektoru b_1 za b_2, b_3, b_4 . Zde je výsledek:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ N_4(x) &= \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \end{aligned}$$

Matici $[B]$ vyjadřuje vztah mezi vektorem deformace $\{\varepsilon\}$ a vektorem koncových posunutí, získáme ji tedy jako druhé derivace báze funkce:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matici tuhosti ohýbaného prutu získáme opět integrací $K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$; nezapomeňme, že nyní je však oblast Ω interval $(0; l)$:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^l B^T E I B dx = EI \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} dx \\ &= EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

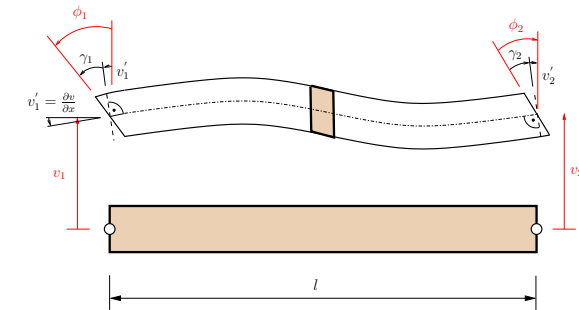
Došli jsme tedy ke stejnému výsledku jako v případě integrace na intervalu $(-1; 1)$. Uveďme si ještě celý postup odvození matice tuhosti ohýbaného prutu pomocí báze funkce volených na intervalu $(0; l)$ pomocí systému *Maxima*:

```
A: matrix([0,0,0,1],[0,0,1,0],[1^3,1^2,1,1],[3*1^2,2*1,1,0]);
b: matrix([1],[0],[0],[0]);
n_1: (A ^^ -1) . b;
b: matrix([0],[1],[0],[0]);
n_2: (A ^^ -1) . b;
b: matrix([0],[0],[1],[0]);
n_3: (A ^^ -1) . b;
b: matrix([0],[0],[0],[1]);
n_4: (A ^^ -1) . b;
bazove funkce tedy budou:
N1: n_1[1]*x^3+n_1[2]*x^2+n_1[3]*x+n_1[4];
B1: diff(N1,x,2);
N2: n_2[1]*x^3+n_2[2]*x^2+n_2[3]*x+n_2[4];
B2: diff(N2,x,2);
N3: n_3[1]*x^3+n_3[2]*x^2+n_3[3]*x+n_3[4];
B3: diff(N3,x,2);
N4: n_4[1]*x^3+n_4[2]*x^2+n_4[3]*x+n_4[4];
B4: diff(N4,x,2);
integraci B^T.B získáme matici tuhosti:
B: matrix(B1,B2,B3,B4);
```

```
K: integrate(B . transpose(B), x, 0, l);
spravnost prubehu bazovych funkci muzeme overit jejich vykreslenim:
l:1;
plot2d(N1,[x,0,l]);
plot2d(N2,[x,0,l]);
plot2d(N3,[x,0,l]);
plot2d(N4,[x,0,l]);
```

8.2 Ohýbaný prut s vlivem smyku (Timošenko)

Timošenkova teorie narozdí od Euler-Bernoulliho teorie uvažuje vliv posouvající síly na deformační energii prutu. Základní kinematické předpoklady se změni – příčné řezy sice zůstávají i nadále rovinnými, nejsou však již kolmé k přetvořené střednici (obr. 8.6).



Obrázek 8.6: Ohýbaný prut s vlivem smyku - geometrické vztahy

Úhel odklonu příčného řezu prutu po deformaci od teoretického kolmého příčného řezu označíme γ . Celkové zkosení příčného řezu θ se bude rovnat součtu úhlu ϕ (Euler-Bernoulliho hypotéza, příčné řezy kolmé k deformované střednici) a úhlu γ vzniklého od působení posouvající síly $T(x)$:

$$\theta = \phi + \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma = u' + \gamma \quad (8.15)$$

Ostatní geometrické vztahy zůstávají shodné s ohýbaným prutem řešeným dle Euler-Bernoulliho hypotézy, tedy:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -y\theta \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Pro odvození matice tuhosti budeme potřebovat deformační energii prutu. Prut je namáhán ohybovým momentem $M(x)$ a posouvající silou $T(x)$:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} + \frac{T^2(x)}{GA_s} dx \quad (8.17)$$

Dosaďme vztahy mezi vnitřními silami a rovnicí ohybové čáry, tedy: $-EIv'' = M(x)$ a $-EIv''' = T(x)$ do 8.17:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 + \frac{E^2 I^2}{GA_s} (v''')^2 dx \quad (8.18)$$

Připomeňme, že A_s je redukovaná, efektivní plocha příčného řezu, která odolává smyku. Její velikost se spočítá z rovnosti deformační energie při smyku $\frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{GA_s}$ – tato musí být rovna energii způsobené rozdělením smykového napětí po průřezu. Např. pro obdélníkový průřez vychází efektivní průřezová plocha $A_s^{\square} = \frac{5}{6}bh$.

Nyní zavedme smykovou štiřlost Φ jako dvanáctinásobek poměru ohybové tuhosti EI a smykové tuhosti GA_s dělený kvadrátem délky:

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_s l^2}$$

Potřeba násobení 12 a dělení kvadrátem délky se projeví až při sčítání ohybové a smykové části matice tuhosti, pro smykovou štiřlost $\Phi = 0$ se totiž Timošenkův prut stane Euler-Bernoulliho prutem.

Pomocí výrazu pro smykovou štiřlost upravme výraz pro deformační energii prutu dosazením do 8.18:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 + \frac{\Phi l^2}{12} EI (v''')^2 dx \quad (8.19)$$

Do tohoto výrazu můžeme dosadit $v'' = Br$. Nezapomeňme, že díky úvahám o skalární povaze deformační energie můžeme kvadrát $(v'')^2$ psát jako $r^T B^T B r$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l r^T B^T EIBr + \frac{\Phi l^2}{12} r^T (B')^T EIB' r dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(r^T \int_0^l B^T EIB dx r + r^T \int_0^l \frac{\Phi l^2}{12} (B')^T EIB' dx r \right) = \\ &= \frac{1}{2} r^T (K_{\text{ohyb}} + K_{\text{smyk}}) r \end{aligned} \quad (8.20)$$

Matice tuhosti ohýbaného prutu s vlivem posouvající síly je tedy:

$$\begin{aligned} K &= K_{\text{ohyb}} + K_{\text{smyk}} \\ K_{\text{ohyb}} &= \int_0^l B^T EIB dx \\ K_{\text{smyk}} &= \int_0^l \frac{\Phi l^2}{12} (B')^T EIB' dx \end{aligned} \quad (8.21)$$

V těchto výrazech B' je vektor obsahující třetí derivace básových funkcí dle x :

$$B' = \left\{ \frac{12}{l^3} \quad \frac{6}{l^2} \quad -\frac{12}{l^3} \quad \frac{6}{l^2} \right\} \quad (8.22)$$

Na závěr pomocí výše odvozených vztahů vyčíslíme matici tuhosti Timošenkova prutu. První část matice tuhosti (pouze vliv ohybu) známe, vyčíslíme tedy pouze vliv posouva-

ující síly K_{smyk} :

$$\begin{aligned} K_{\text{smyk}} &= \frac{\Phi l^2}{12} \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} \frac{12}{l^3} \\ \frac{6}{l^2} \\ -\frac{12}{l^3} \\ \frac{6}{l^2} \end{array} \right\} EI \left\{ \frac{12}{l^3} \quad \frac{6}{l^2} \quad -\frac{12}{l^3} \quad \frac{6}{l^2} \right\} dx = \\ &= \Phi EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{l}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{l}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{l}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{l}{l} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po sečtení K_{smyk} a K_{ohyb} dospějeme k matici tuhosti Timošenkova prutu, vyjádřené pomocí smykové štiřlosti Φ :

$$K = EI(1 + \Phi) \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{1}{l}(4 + \Phi) & -\frac{6}{l^2} & \frac{1}{l}(2 - \Phi) \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{1}{l}(2 - \Phi) & -\frac{6}{l^2} & \frac{1}{l}(4 + \Phi) \end{bmatrix} = \quad (8.23)$$

$$= \frac{EI}{l} (1 + \Phi) \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 + \Phi & -\frac{6}{l} & 2 - \Phi \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 - \Phi & -\frac{6}{l} & 4 + \Phi \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

8.3 Ohýbaný prut na pružném podloží (Timošenko–Winkler)

Dalším důležitým jednodimenzionálním prvkem je ohýbaný prut na pružném, Winklerovském podloží. Pružné podloží lze modelovat jako soustavu pružin podepírajících prut po celé jeho délce. Winklerovské podloží je zjednodušeným případem, protože zanedbává jak vliv vícedimenzionální pružnosti i tření.

Reakce působící na infinitesimální délce prutu dx je rovna $df_w = -k_w v(x) dx$ kde k_w je tuhost Winklerova podloží na jednotku délky. Její jednotky jsou $[\frac{N}{m}]$ tedy $[\frac{N}{m^2}]$. Hustota deformační energie stlačeného podloží délky dx je $\lambda = \frac{1}{2} k_w v(x)^2 dx$. Deformační energie prutu na pružném podloží je potom:

$$U = U + U_w$$

kde

$$U_w = \frac{1}{2} \int_0^l k_w v^2(x) dx \quad (8.25)$$

Matici tuhosti prutu na Winklerovském podloží získáme přičtením tuhosti podloží k matici tuhosti prutu. Celková deformační energie ohýbaného prutu na pružném podloží (Winkler–Timošenko) bude:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 + \frac{\Phi l^2}{12} EI (v''')^2 dx + k_w \int_0^l v^2 dx \quad (8.26)$$

Proveďme toto pro případ Timošenkova prutu. Matici tuhosti podloží získáme snadno:

$$K_w = k_w \int_0^l v^2(x) dx = k_w \int_0^l B^T B dx \quad (8.27)$$

Po vyčíslení dostaneme:

$$K_w = k_w \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

Celková matice tuhosti ohýbaného prutu na Winklerovském podloží je součtem matice tuhosti prutu a matice tuhosti W. podloží:

$$K = \frac{EI}{l} (1 + \Phi) \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 + \Phi & -\frac{6}{l} & 2 - \Phi \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l^2} & 2 - \Phi & -\frac{6}{l} & 4 + \Phi \end{bmatrix} + k_w \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

8.4 Ohýbaný prut – vliv normálové síly

Uvažujme prut namáhaný kombinací ohybového momentu M , posouvající síly T a normálové síly N . Nosník bude nyní mít v každém uzlu tři stupně volnosti – posunutí ve směru osy x , posunutí ve směru osy z a pootočení příčného řezu ϕ .

Vektor uzlových posunutí r bude mít tedy celkem šest složek:

$$r = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

Deformační energie prutu bude:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} + \frac{T^2(x)}{GA_s} + \frac{N^2(x)}{EA} dx \quad (8.30)$$

Nyní neexistuje žádná geometrická vazba mezi posuny a pootočeními. Matici tuhosti prutu získáme snadno sečtením matice tuhosti Timošenkova ohýbaného prutu a taženého-tlačeného prutu (rozšířené pro zbývající stupně volnosti):

$$K = \frac{EI}{l} (1 + \Phi) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & 0 & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 4 + \Phi & 0 & -\frac{6}{l} & 2 - \Phi \\ 0 & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l^2} & 2 - \Phi & 0 & -\frac{6}{l} & 4 + \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

Na prut může působit spojité zatížení libovolného směru $f_0(x)$. Toto zatížení lze rozložit na zatížení působící v ose prutu $n_0(x)$ a zatížení kolmé ke střednici $q_0(x)$. Pro jednoduchost uvažujme spojité zatížení konstantní hodnoty $f_0 = q_0 + n_0$. Vektor transformovaného zatížení bude:

$$f = \begin{Bmatrix} -\frac{n_0 l}{2} \\ \frac{q_0 l}{2} \\ \frac{q_0 l^2}{2} \\ \frac{12}{l} n_0 \\ \frac{q_0 l}{2} \\ -\frac{q_0 l^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (8.32)$$

Kapitola 9

Izoparametrické elementy

Nejčastějším typem používaných prvků se staly tzv. *izoparametrické prvky*, t.j. prvky u nichž se k interpolaci jak geometrie, tak posunutí po prvku používá stejných interpolačních funkcí. Toto lze názorně zapsat:

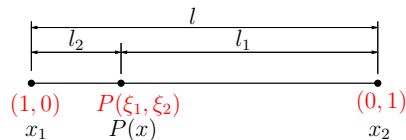
$$x = [N]^T \{x_n\} \quad a \quad u = [N]^T \{r\} \quad (9.1)$$

Interpolační (bázové) funkce $[N]$ se zapisují pomocí *přirozené souřadnice* ξ , jejíž koncept bude vysvětlen v následujícím odstavci.

9.1 Přirozené souřadnice

Jak už bylo řečeno v předchozích kapitolách, používáme dva typy souřadných systémů - lokální a globální. Lokální souřadný systém je definován pro každý element a pomocí transformačních zákonů jsou hodnoty přepočítávány do globálního souřadného systému. V tomto systému je obvykle definována geometrie celého zkoumaného tělesa, zadáváno zatížení apod.

Přirozený souřadný systém je lokální systém, který dovoluje popsat polohu libovolného bodu elementu pomocí několika bezrozměrných čísel (v rovině dvou, v prostoru tří), jejichž velikost je vždy menší nebo rovna jedné. Tento systém je navíc vymyšlen tak, aby hodnota souřadnice v uzlovém bodu elementu byla jednotková. Zavedení přirozených souřadnic zjednodušuje formulaci konečných elementů a podstatně zjednodušuje numerickou integraci, neboť převádí integraci na obecném intervalu na integraci na intervalu $\langle -1; +1 \rangle$.



Obrázek 9.1: Ke konceptu přirozených souřadnic (1-D)

9.1.1 Přirozené souřadnice pro 1-D elementy

Přirozené souřadnice jsou takové souřadnice, které dávají v uzlovém bodu elementu jednotkovou hodnotu souřadnice. Bude platit, že součet všech přirozených souřadnic je roven jedné, t.j.

$$\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$$

Počet přirozených souřadnic bude vždy o jednu vyšší, než počet souřadnic v odpovídajícím kartézském souřadném systému, t.j. pro jednodimenzionální prvky budeme potřebovat dvě přirozené souřadnice ξ_1 a ξ_2 , pro rovinné prvky tři souřadnice ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 a v prostoru dokonce čtyři ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 . To je dáno už tím, že máme navíc jednu podmínku pro přirozené souřadnice a to, že jejich součet je roven jedné.

Podívejme se nyní na odvození přirozených souřadnic pro tažený-tlačený prut z obrázku 9.1. Transformační vztah mezi kartézskou souřadnicí libovolného bodu P a přirozenými souřadnicemi ξ_1, ξ_2 lze zapsat:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

První rovnice pouze vyjadřuje, že součet přirozených souřadnic je roven 1. Inverzí vztahu 9.2 dostáváme:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2/(x_2-x_1) & -1/(x_2-x_1) \\ -x_1/(x_2-x_1) & 1/(x_2-x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2/l & -1/l \\ -x_1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = (9.3) \\ &= \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \quad (9.4) \end{aligned}$$

Názorně si ukážeme použití přirozeného souřadného systému pro tažený-tlačený prut. Bázové funkce v přirozeném souřadném systému mají tvar:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_2}{l} - \frac{x}{l} = \frac{x_2-x}{l} \\ \xi_2 &= \frac{x}{l} - \frac{x_1}{l} = \frac{x-x_1}{l} \end{aligned}$$

Všimněme si, že platí

$$\xi_1 = \frac{l_1}{l} \quad a \quad \xi_2 = \frac{l_2}{l} \quad (9.5)$$

tedy, že přirozenou souřadnicí můžeme rovněž získat jako poměr délky "zbývajícího" intervalu k celkové délce. Využijme nyní přirozených souřadnic pro 1-D prvek k odvození matice tuhosti taženého-tlačeného prutu. Vzpomeňme, že matice tuhosti prutu je $K = \int_{(\Omega)} B^T D B d\Omega$. Matice B vyjadřuje vztah mezi vektorem deformace $\{\varepsilon\}$ a vektorem koncových posunů $\{r\}$. Posunutí po prvku $u(x)$ je aproximováno pomocí přirozených bázových funkcí $N_1 = \xi_1$ a $N_2 = \xi_2$ dle vztahu 9.2. Protože je vektor deformace $\{\varepsilon\}$ roven derivací posunutí $u(x)$ je matice B rovna:

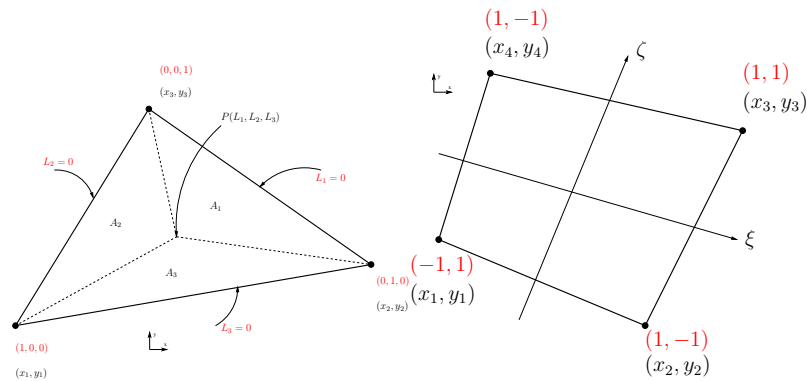
$$B = \frac{dN}{d\xi} = \begin{bmatrix} \frac{d\xi_1}{dx} & \frac{d\xi_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Nyní můžeme již snadno odvodit matici tuhosti elementu integrací na oblasti elementu Ω :

$$K = \int_{(\Omega)} B^T DB d\Omega = \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dx = \\ = EA \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.1.2 Trojúhelníkové souřadnice

Podívejme se nyní na přirozený souřadnicový systém pro rovinné elementy. V rovině se tyto přirozené souřadnice často nazývají plošnými souřadnicemi. Poloha bodu bude pro trojúhelníkový prvek definována třemi parametrickými souřadnicemi ξ_1, ξ_2, ξ_3 (z nichž pouze dvě budou nezávislé). Pro čtyřúhelník budeme definovat dvě přirozené souřadnice ξ a ζ (viz. obr. 9.2).



Obrázek 9.2: Přirozené souřadnice v rovině

Plošné souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 lze definovat rovněž pomocí poměru ploch trojúhelníků, na které rozdělují libovolný bod $P(x, y)$ původní trojúhelník, t.j.

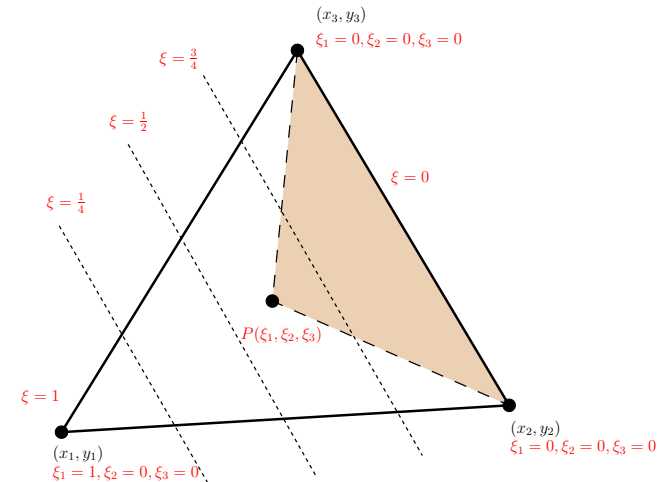
$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (9.7)$$

Plochu trojúhelníku s vrcholy o souřadnicích $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ lze spočítat pomocí determinantu matice obsahující souřadnice jeho vrcholových bodů:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (9.8)$$

Přirozené souřadnice potom budou:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \quad (9.9)$$



Obrázek 9.3: Trojúhelníkové souřadnice

Součet takto definovaných plošných souřadnic je opět jednotkový, jinými slovy součet plošných souřadnic kteréhokoliv bodu trojúhelníku je roven jedné. Je vidět, že toto vskutku platí:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \quad (9.10)$$

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a plošnými (v tomto případě je budeme nazývat trojúhelníkovými) souřadnicemi ξ_1, ξ_2, ξ_3 je dán pomoci:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Přirozené souřadnice ξ_i můžeme rovněž získat přímo inverzí vztahu 9.11. Inverzi provedeme pomocí systému pro symbolickou algebru *Maxima*. Nadefinujeme symbolickou matici transformace a budeme hledat její inverzi. Použijeme příkazy *matrix* a *invert*.

```
maxima] T: matrix([1,1,1],[x1,x2,x3],[y1,y2,y3]);
```

$$(D1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

(C1) T1: invert(T);

$$(D2) \begin{pmatrix} \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} & \frac{y_2 - y_3}{x_3y_1 - x_1y_3} & \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_3} \\ \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} & \frac{y_3 - y_1}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} & \frac{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} \\ \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} & \frac{y_1 - y_2}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} & \frac{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1} \end{pmatrix}$$

V inverzní matici vidíme, že všechny členy mají stejný jmenovatel, můžeme tedy matici zjednodušit pomocí *ev* (vytkneme determinant matice):

(C2) T_det:determinant(T);

(C3) N: T_det*T1;

$$(D3) \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Tento determinant je zároveň roven dvojnásobku plochy trojúhelníka. Hledaný inverzní vztah mezi trojúhelníkovými a kartézskými souřadnicemi lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Stejného výsledku lze dosaáhnout i pomocí plošných souřadnic. Přirozená souřadnice ξ_1 je rovna poměru ploch A_1 a A . Ukažme si pouze odvození první přirozené souřadnice ξ_1 . Budeme potřebovat plochy trojúhelníků A_1 a A :

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Opět pomocí *maxímy*:

(C4) A_1:matrix([1,1,1],[x,x2,x3],[y,y2,y3]);

$$(D4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Přirozenou souřadnici ξ_1 získáme dělením ploch A_1 a A (resp. jejich dvojnásobku):

(C5) ev(A_1.invert(A),detout);

$$(D5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{x_2y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_2y_1}$$

Tedy stejný výsledek odpovídající prvnímu řádku získaného pomocí inverze matice transformace. Nyní použijme ještě *Maxímu* k získání matice B . Budeme potřebovat derivace funkcí ξ_i dle x a y . Sestavme nejprve funkce ξ_i :

(C6) xi_1: N[1,1]+N[1,2]*x+N[1,3]*y;

(C7) xi_2: N[2,1]+N[2,2]*x+N[2,3]*y;

(C8) xi_3: N[3,1]+N[3,2]*x+N[3,3]*y;

$$N_1 = \xi_1 = x_2y_3 + x(y_2 - y_3) - x_3y_2 + (x_3 - x_2)y$$

$$N_2 = \xi_2 = x(y_3 - y_1) - x_1y_3 + x_3y_1 + (x_1 - x_3)y$$

$$N_3 = \xi_3 = x_1y_2 + x(y_1 - y_2) - x_2y_1 + (x_2 - x_1)y$$

Pro lineární trojúhelníkový prvek (s uzlovými body pouze ve vrcholech) bude platit, že i -tá přirozená souřadnice je přímo i -tou bázovou funkcí $N_i(x, y)$. Abychom získali matici $B = \partial N$ budeme potřebovat derivace bázových funkcí $N_i(x, y)$ podle x a y :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} & 0 & \frac{dN_2}{dy} & 0 & \frac{dN_3}{dy} \\ \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dy} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dy} & \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_3}{dy} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

(C9) dxi_1_dx: diff(xi_1,x);

(C10) dxi_1_dy: diff(xi_1,y);

(C11) dxi_2_dx: diff(xi_2,x);

(C12) dxi_2_dy: diff(xi_2,y);

(C13) dxi_3_dx: diff(xi_3,x);

(C14) dxi_3_dy: diff(xi_3,y);

Matici B (pro jednoduchost vynecháme člen $\frac{1}{2A}$) pak získáme snadno:

(C15) B: matrix([dxi_1_dx, 0, dxi_2_dx, 0, dxi_3_dx, 0],

(C16) [0, dxi_1_dy, 0, dxi_2_dy, 0, dxi_3_dy],

(C17) [dxi_1_dy, dxi_1_dx, dxi_2_dy, dxi_2_dx, dxi_3_dy, dxi_3_dx]);

$$B = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Nyní by bylo již snadné odvodit matici tuhosti trojúhelníkového prvku. Potřebovali bychom pouze znát matici materiálové tuhosti D (v dalším textu bude uvedena matice materiálové tuhosti pro případ rovinné napjatosti a rovinné deformace). Obecně má matice materiálové tuhosti pro rovinný prvek tento tvar:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

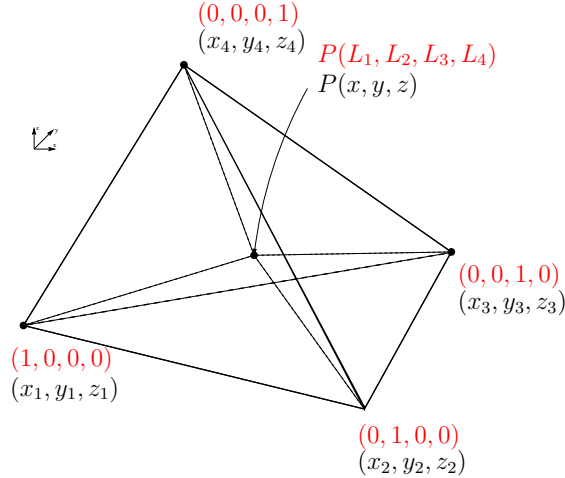
Matici tuhosti trojúhelníkového prvku bychom získali integrací:

$$K = \int_{(\Omega)} B^T D B d\Omega = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \int_{(\Omega)} d\Omega$$

9.1.3 Přirozené souřadnice pro čtyřstěn

Analogicky k plošným souřadnicím lze snadno definovat objemové souřadnice. Pro čtyřstěn z obrázku 9.4 dostáváme transformační vztah mezi kartézskými a přirozenými souřadnicemi:



Obrázek 9.4: Přirozené souřadnice pro čtyřstěn (3-D)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

Objemové souřadnice ξ_i mohou být definovány analogicky k plošným souřadnicím jako objemové souřadnice, tedy poměrem objemu protilehlého čtyřstěnu k objemu celkového čtyřstěnu:

$$\xi_i = \frac{V_i}{V} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, 4 \quad (9.16)$$

Objem tetraedru s vrcholy o souřadnicích $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ je:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (9.17)$$

přirozená souřadnice ξ_1 bude tedy dána poměrem determinantů:

$$\xi_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}} \quad (9.18)$$

Zbývající přirozené souřadnice ξ_i lze odvodit obdobně. Průchořejší je však odvodit přirozené souřadnice pro čtyřstěn pomocí inverze vztahu 9.15. Použijme *Maximu* a získáme snadno následující transformační vztah:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} x_2(y_3z_4 - y_4z_3) - x_3(y_2z_4 - y_4z_2) + x_4(y_2z_3 - y_3z_2) & -y_3z_4 + y_2z_4 + y_4z_3 - y_2z_3 - y_4z_2 + y_3z_2 \\ -x_1(y_3z_4 - y_4z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) - x_4(y_1z_3 - y_3z_1) & y_3z_4 - y_1z_4 - y_4z_3 + y_1z_3 + y_4z_2 - y_3z_2 \\ x_1(y_2z_4 - y_4z_2) - x_2(y_1z_4 - y_4z_1) + x_4(y_1z_2 - y_2z_1) & -y_2z_4 + y_1z_4 + y_4z_2 - y_1z_2 - y_4z_1 + y_2z_1 \\ -x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) - x_3(y_1z_2 - y_2z_1) & y_2z_3 - y_1z_3 - y_3z_2 + y_1z_2 + y_3z_1 - y_2z_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Pro lineární čtyřstěn (uzly pouze ve vrcholech), bude pro bázev funkce platit:

$$N_i = \xi_i$$

Derivaci bázev funkcí $N_i = \xi_i$ postupně dle x, y a z lze sestavit matici $B = \partial N$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dy} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{dy} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{dz} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dz} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

a integrací $K = \int_{(\Omega)} B^T D B d\Omega$ získat matici tuhosti prvku.

9.2 Trojúhelníkový prvek s konstantní deformací (CST)

Využití konceptu přirozených souřadnic si ukážeme na příkladě odvození matice tuhosti lineárního trojúhelníkového prvku. Je to nejjednodušší prvek pro řešení rovinných úloh pružnosti (rovinná deformace a rovinná napjatost). Díky své definici pomocí tří uzlových bodů je posunutí po prvku aproximováno lineárně a díky tomu je deformace prvku konstantní. Často tedy bývá nazýván prvek CST, tedy Constant Strain Triangle.

Základní rovnice získáme pomocí principu minima potenciální energie. Deformační energie bude:

$$U = \int_{(V)} \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} (D\varepsilon)^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} h \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \quad (9.21)$$

kde h je tloušťka prvku. Práce vnějších sil bude rovna práci plošných sil $b = \{ b_x \ b_y \}^T$ na posunutí $u = \{ u_x \ u_y \}^T$ a práci sil, působících na hranici Γ (tyto síly bývají označovány TRACTION FORCES, \bar{i} :

$$W = \int_{(\Omega)} hu^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} r^T \bar{i} \, d\Gamma \quad (9.22)$$

Potenciál deformační energie:

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} h \varepsilon^T D \varepsilon \, d\Omega - \left(\int_{(\Omega)} hu^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} r^T \bar{i} \, d\Gamma \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} hr^T B^T D B r \, d\Omega - \left(\int_{(\Omega)} hr^T N^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} r^T \bar{i} \, d\Gamma \right) = \\ &= \frac{1}{2} r^T \int_{(\Omega)} h B^T D B \, d\Omega r - r^T \left(\int_{(\Omega)} h N^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{i} \, d\Gamma \right) = \\ &= \frac{1}{2} r^T K r - r^T f \end{aligned}$$

kde $K = \int_{(\Omega)} h B^T D B \, d\Omega$ je matice tuhosti prvku pro rovinnou deformaci/napjatost a $f = \int_{(\Omega)} h N^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{i} \, d\Gamma$ je vektor transformovaného zatížení.

Posunutí libovolného bodu uvnitř prvku budeme aproximovat pomocí posunutí uzlových bodů a trojúhelníkových souřadnic ξ_i ve tvaru:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 \\ v(x, y) &= v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 \end{aligned} \quad (9.23)$$

Toto zapíšeme pomocí maticového zápisu:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{r}) \quad (9.24)$$

Matici B , tedy matici vztahu mezi vektorem deformace a uzlových posunutí získáme derivací matice báзовých funkcí N . K tomuto využijeme opět geometrické rovnice:

$$\varepsilon = \partial u = \partial N r = B r \quad (9.25)$$

kde matice ∂ je opět tzv. operátorová matice, tedy matice symbolických derivací. V našem případě rovinného problému má rozměr (3,2) a lze ji zapsat následujícím způsobem:

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

Pomocí operátorové matice ∂ vyjádříme geometrické rovnice pomocí vektoru koncových posunutí:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \partial u = \partial N r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{31} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Kde matice B je symbolická operátorová matice. Vztah mezi napětím a deformací je dán pomocí materiálové matice tuhosti D . V našem případě rovinného problému vztah mezi napětím a přetvořením zapíšeme pomocí:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\sigma = \mathbf{D} \varepsilon) \quad (9.27)$$

Nyní můžeme matici tuhosti CST prvku odvodit dle následujícího vztahu $K = \int_{(\Omega)} h B^T D B \, d\Omega$.

Je zřejmé, že pokud bude tloušťka prvku konstantní, lze integraci snadno provést (a provést násobení výše uvedených tří matic). Matice CST prvku bude mít rozměr (6,6) a nabyde následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} K &= \int_{(\Omega)} h B^T D B \, d\Omega = h \int_{(\Omega)} d\Omega B^T D B = \frac{hA}{4A^2} B^T D B = \\ &= \frac{h}{4A^2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nyní dokončíme zbývajících pár kroků nezbytných k definování vztahů pro CST prvek. Pro vyjádření funkcionálu potenciální energie $\Pi = U - W$ nám zbývá vyjádřit výraz pro práci vnějších sil. Uvažujme na prvku pouze objemové síly, definované pomocí složek b_x a b_y (jednotky N/m^3):

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (9.28)$$

vektor koncových sil získáme obdobným způsobem, jako v případě taženého-tlačeného prutu:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} h N^T b \, d\Omega = \int_{\Omega} h \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \, d\Omega \quad (9.29)$$

Pro jednoduchost uvažujme tloušťku prvku h konstantní, stejně tak i složky zatížení b_x a b_y . Potom s přihlédnutím k definici plošných souřadnic lze psát:

$$\int_{\Omega} \xi_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} \xi_2 \, d\Omega = \int_{\Omega} \xi_3 \, d\Omega = \frac{1}{3} A \quad (9.30)$$

Po úpravě:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{Ah}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (9.31)$$

9.3 Podstata izoparametrických prvků

Izoparametrické prvky používají stejné interpolační funkce k aproximaci jejich geometrie i posunů uvnitř prvku. V případě CST prvku lze toto zapsat pomocí následujícího maticového zápisu:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (9.32)$$

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 \quad (9.33)$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3$$

V případě trojúhelníkového prvku zjistíme, že při přechodu z lineárního prvku na prvky vyšších řádů (bázové funkce budou polynomy vyšších stupňů) jsou zpřesněna pouze posunutí, geometrie zůstává definována stejně. Tyto elementy se nazývají *superparametrické*. V případě kvadratického trojúhelníkového prvku (LST - linear strain triangle) se jedná o následující:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{Bmatrix} \quad (9.34)$$

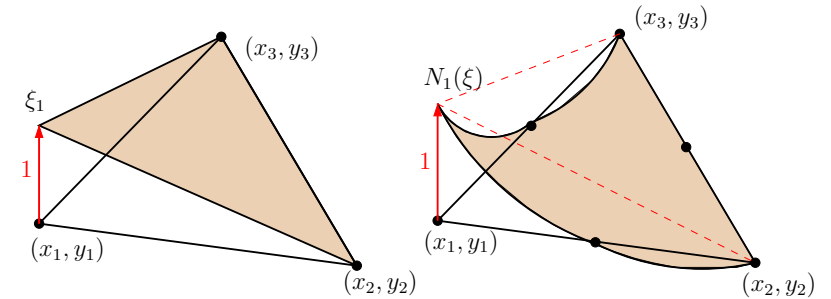
Obecný zápis

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} \quad (9.35)$$

Poslední řádek představuje teplotní pole po prvku, které je po prvku aproximováno ze zadaných uzlových hodnot pomocí stejných aproximačních funkcí. Stejným způsobem může být aproximována např. tloušťka deskového, či skořepinového prvku.

Konstrukci bázových funkcí pro mezilehlé uzlové body si ukážeme nejprve na případě LST prvku, později ukážeme to samé s použitím kvadratického čtyřúhelníkového prvku Q_8 . U CST prvku platilo, že bázové funkce byly vlastně přirozené souřadnice:

$$N_1 = \xi_1 \quad N_2 = \xi_2 \quad N_3 = \xi_3 \quad (9.36)$$



Obrázek 9.5: Bázové funkce: přechod ke kvadratickým báz. funkcím

Podíváme-li se na obrázek 9.5 zjistíme, že bázové funkce pro rohové uzlové body LST prvku lze zapsat pomocí přirozené souřadnice ξ_1 ve tvaru:

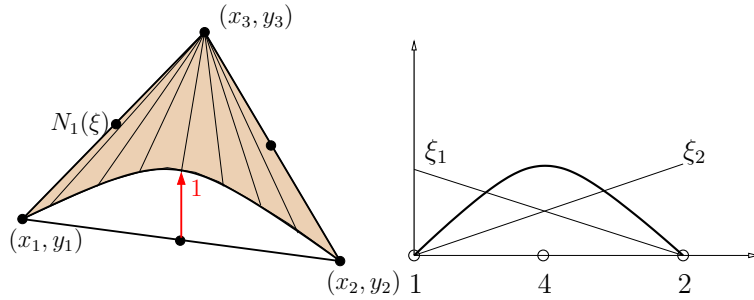
$$N_1 = A\xi_1^2 + B\xi_1 + C$$

pomocí okrajových podmínek:

$$N_1(0) = 0 \quad N_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad N_1(1) = 1$$

získáme vztah pro první bázovou funkci LST prvku: $N_1(\xi) = 2\xi_1^2 - \xi_1$. Zbývající bázové funkce snadno zjistíme odměnou okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\ N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\ N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \end{aligned} \quad (9.37)$$

Obrázek 9.6: Kvadratická báz. funkce $N_4(\xi)$ pro LST prvek

Bázové funkce pro mezilehlé uzlové body lze rovněž s pomocí obrázku 9.6 odhadnout, např. funkci $N_4(\xi)$ budeme hledat ve tvaru:

$$N_4(\xi) = A\xi_1\xi_2$$

kostantu A získáme aplikací podmínky pro jednotkové posunutí v místě uzlu, tedy:

$$N_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow A\xi_1\left(\frac{1}{2}\right)\xi_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$A\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow A = 4$$

zbyvající bázové funkce N_5 a N_6 obdobným způsobem, výsledek je:

$$\begin{aligned} N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ N_6 &= 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \quad (9.38)$$

Matice bázových funkcí pro LST prvek má tedy tvar:

$$N = \{ \xi_1(2\xi_1 - 1), \xi_2(2\xi_2 - 1), \xi_3(2\xi_3 - 1), 4\xi_1\xi_2, 4\xi_2\xi_3, 4\xi_3\xi_1 \} \quad (9.39)$$

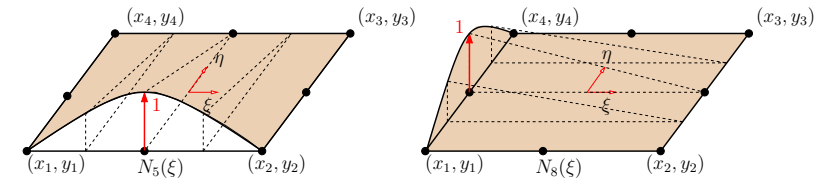
Nyní se v rychlosti podíváme na čtyřúhelníkový izoparametrický prvek Q_8 , definovaný pomocí osmi uzlových bodů. Poměrně jednoduše lze odhadnout bázové funkce v případě jeho lineární varianty Q_4 s uzlovými body pouze ve vrcholech. Bázové funkce jsou velmi jednoduché, lze je konstruovat jako součin dvou funkcí zvlášť pro souřadnici ξ a η . Lineární funkce ve směru souřadnice ξ je dána pomocí $\frac{1}{2}(1 - \xi)$, stejně tak ve směru η bude ona lineární funkce $\frac{1}{2}(1 - \eta)$. Jejich součinem získáme první bázovou funkci pro lineární čtyřúhelníkový prvek $N_1^{Q_4}(\xi, \eta)$.

Obdobně získáme zbyvající bázové funkce pro lineární prvek Q_4 , pouze měníme kvadranty a tím i příslušné znaménko. Pro prvek Q_4 můžeme tedy zapsat následující lineární

funkce:

$$\begin{aligned} N_1^{Q_4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2^{Q_4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^{Q_4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4^{Q_4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (9.40)$$

Poměrně jednoduchou geometrickou úvahou lze z lineárních bázových funkcí konstruovat kvadratické bázové funkce pro prvek Q_8 . Postup je zřejmý z obrázku 9.7.

Obrázek 9.7: Kvadratická báz. funkce $N_5(\xi)$ a $N_8(\xi, \eta)$ pro prvek Q_8

Bázovou funkci $N_5^{Q_8}(\xi, \eta)$ získáme jako součin dvou funkcí: ve směru souřadnice ξ kvadratické funkce $1 - \xi^2$ a ve směru souřadnice η lineární funkce $\frac{1}{2}(1 - \eta)$:

$$N_5^{Q_8}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

Obdobně pro funkci $N_8(\xi, \eta)$, tentokrát bude však kvadratická funkce ve směru souřadnice η :

$$N_8^{Q_8}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$

Pro rohové uzly a bázové funkce $N_1(\xi, \eta) \dots N_4(\xi, \eta)$ lze postupovat od lineární bázové funkce $N_1^{Q_4}(\xi, \eta)$ již definované pro lineární prvek Q_4 .

$$N_{step1}^{Q_8} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

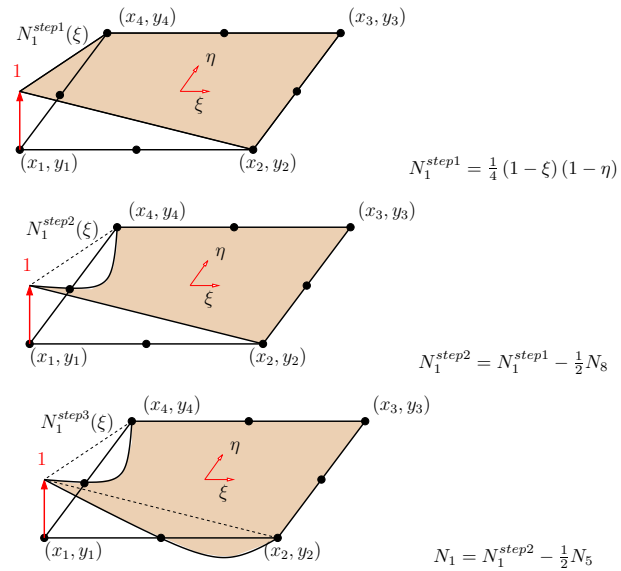
Ve směru souřadnice η nejprve odečteme polovinu funkce $N_8^{Q_8}$ (polovinu musíme odečíst proto, abychom pro souřadnici $\eta = 0$ získali vždy 0):

$$N_{step2}^{Q_8} = N_{step1} - \frac{1}{2}N_8^{Q_8} = \frac{1}{4}[(1 - \xi)(1 - \eta) - (1 - \xi)(1 - \eta^2)] \quad (9.41)$$

stejný postup lze uplatnit i pro druhý směr, tedy pro souřadnici ξ :

$$N_1^{Q_8} = N_{step2} - \frac{1}{2}N_5 = N_1 - \frac{1}{2}N_5^{Q_4} - \frac{1}{2}N_8^{Q_4} = \frac{1}{4}[(1 - \xi)(1 - \eta) - (1 - \xi)(1 - \eta^2) - (1 - \xi^2)(1 - \eta)] \quad (9.42)$$

Všechny geometrické úvahy jsou zřejmé z obr. 9.8.



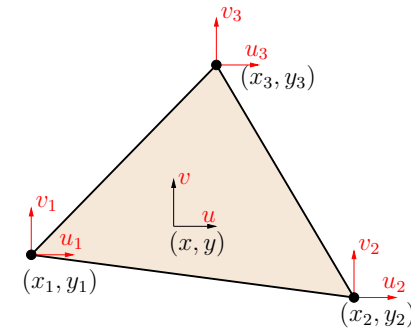
Obrázek 9.8: Postup tvorby kvadratické báz. funkce $N_1(\xi)$ pro prvek Q_8

9.3.1 Souhrn bázových funkcí pro nejběžnější rovinné prvky

Závěrem si shrňme, jak budou vypadat bázové funkce pro nejběžnější typy rovinných elementů. Přírozené souřadnice nyní i pro trojúhelník označme pomocí tří písmen řecké abecedy, konkrétně ξ , η a ζ :

9.3.1.1 Constant Strain Triangle (CST, T3)

Tento element je znázorněn na obr. 10.5.



Obrázek 9.9: Trojúhelníkový prvek s konstantní deformací (Constant Strain Triangle)

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi \\ N_2 &= \eta \\ N_3 &= \zeta \end{aligned} \tag{9.43}$$

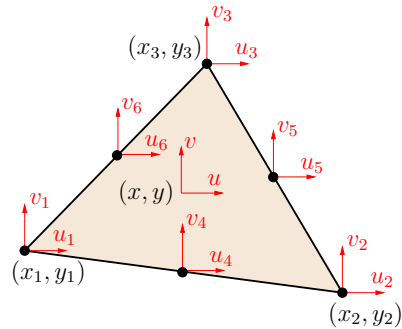
9.3.1.2 Linear Strain Element (LST, T6)

Tento element je znázorněn na obr. 9.10.

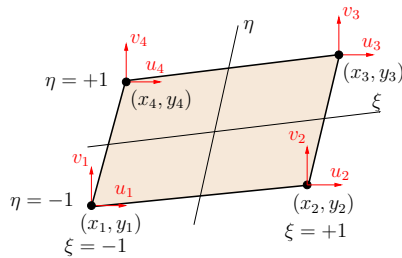
$$\begin{aligned} N_1 &= \xi(2\xi - 1) \\ N_2 &= \eta(2\eta - 1) \\ N_3 &= \zeta(2\zeta - 1) \\ N_4 &= 4\xi\eta \\ N_5 &= 4\eta\zeta \\ N_6 &= 4\eta\xi \end{aligned} \tag{9.44}$$

9.3.1.3 Linear Quadrilateral Element (Q4)

Tento element je znázorněn na obr. 9.11.



Obrázek 9.10: Trojúhelníkový prvek s lineární deformací (Linear Strain Triangle)

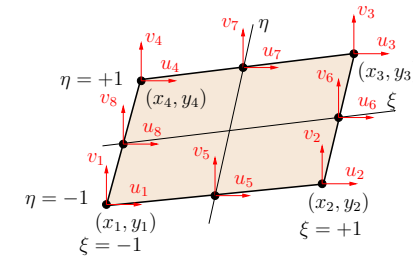


Obrázek 9.11: Čtyřúhelníkový prvek s konstantní deformací (Linear Quadrilateral Element)

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (9.45)$$

9.3.1.4 Quadratic Quadrilateral Element (Q8)

Tento element je znázorněn na obr. 9.12.



Obrázek 9.12: Čtyřúhelníkový prvek s lineární deformací (Quadratic Quadrilateral Element)

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(\eta - 1)(\xi + \eta + 1) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(\eta - 1)(\eta - \xi + 1) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta + 1) \end{aligned} \quad (9.46)$$

Kapitola 10

Prvky pro rovinnou úlohu

10.1 Základní úlohy teorie pružnosti

Připomeňme si základní rovnice teoretické pružnosti (geometrické, statické a fyzikální rovnice). V prostoru máme určit *vektor posunutí*

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

vektor deformace:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

a vektor napětí:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Prvními rovnice, které si připomeneme, jsou *geometrické rovnice*, které vyjadřují vztah mezi vektorem posunutí $\{u\}$ a vektorem deformace $\{\varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Vztah mezi napětím a přetvořením je u *lineárního elastického materiálu* dán rozšířeným Hookeovým zákonem, jenž je z teorie pružnosti znám ve tvaru:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z} & \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{yx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z} & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_z} - \nu_{zx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y} & \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz} \\ \gamma_{yx} &= \frac{1}{G_{yx}} \tau_{yx} \end{aligned} \quad (10.2)$$

tyto rovnice se dají jednoduše zapsat pomocí maticového zápisu ve tvaru:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad \varepsilon = C\sigma \quad (10.3)$$

kde $[C]$ je matice poddajnosti pro obecně anizotropní materiál. Inverzí vztahu 10.3 získáme vztah pro výpočet vektoru napětí, ve kterém $[D]$ je *matice tuhosti materiálu*:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (10.4)$$

Platí, že $[D]^{-1} = [C]$. Ještě pro úplnost “vyčíslíme” matici poddajnosti (izotropní materiál):

$$[C] = [D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

Další rovnice jsou Cauchyovy rovnice, plynoucí z podmínky rovnováhy na infinitesimálním objemu $dV = dx \times dy \times dz$.

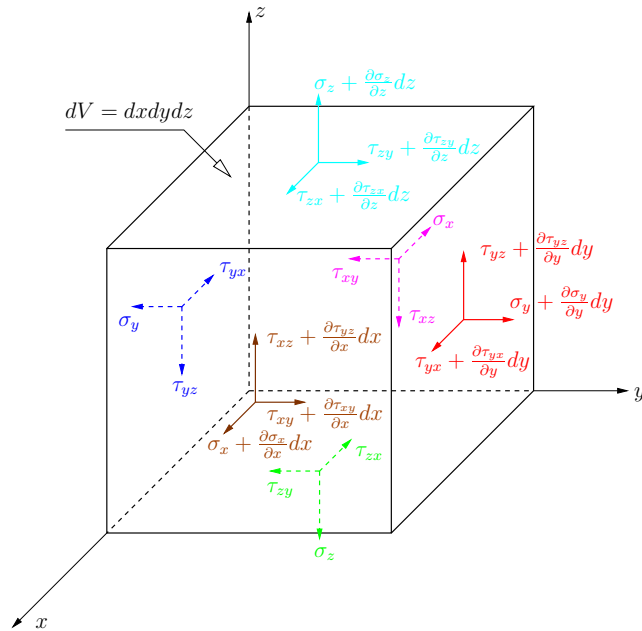
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad (10.8)$$

zkráceně:

$$[\partial]\{\sigma\} + \{b\} = \{0\} \quad (10.9)$$



Obrázek 10.1: Podmínky rovnováhy na elementu

kde $\{b\}$ je vektor objemových sil (jednotky $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$) a $[\partial]$ je tzv. *operátorová matice*:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Provedením momentových výminek rovnováhy kolem os rovnoběžných s osami souřadnic a procházejících těžištěm kvádru obdržíme rovnice vyjadřující tzv. větu o vzájemnosti smykových napětí:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad (10.11)$$

V prostoru hlavních napětí (Haigh-Westergardův prostor) bude vektor napětí mít tvar:

$$\{\sigma\}^T = \{ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (10.12)$$

Doplňme ještě pro úplnost výrazy pro invarianty napětí (budeme potřebovat při teoriích porušení):

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (10.13)$$

a invarianty deformace:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I_2 &= \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) = \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ I_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{yz}\gamma_{xz}\gamma_{xy} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{xz}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (10.14)$$

Pomocí invariantů napětí/deformace lze jednoduše rozložit napjatost v bodě na napjatost *objemovou (volumetrickou)* a *deviatorickou*. Také jsou tyto napjatosti nazývány *napjatost změny objemu* a *napjatost změny tvaru*. Symbolicky zapíšeme pro vektor napětí:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= \{\sigma_v\}^T + \{\sigma_D\}^T \\ \{\sigma_v\}^T &= \{ J_1/3 \quad J_1/3 \quad J_1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\ \{\sigma_D\}^T &= \{ \sigma_x - J_1/3 \quad \sigma_y - J_1/3 \quad \sigma_z - J_1/3 \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy} \} \end{aligned} \quad (10.15)$$

a vektor deformace:

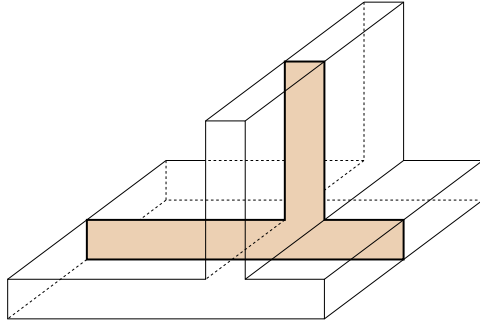
$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_v\}^T + \{\varepsilon_D\}^T \\ \{\varepsilon_v\}^T &= \{ I_1/3 \quad I_1/3 \quad I_1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\ \{\varepsilon_D\}^T &= \{ \varepsilon_x - I_1/3 \quad \varepsilon_y - I_1/3 \quad \varepsilon_z - I_1/3 \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy} \} \end{aligned} \quad (10.16)$$

10.2 Úlohy rovinné pružnosti

Velmi používaným zjednodušením problémů pružnosti je snížení dimenzionality daného problému. Velmi často zjednodušení prostorového problému na dvoudimenzionální má za následek dramatické snížení časové náročnosti na výpočet.

10.2.1 Rovinná deformace

Nejsrozumitelnějším příkladem rovinné deformace je dlouhá stěna, např. opěrná zed z obrázku 10.2. Geometrie stěny ani její zatížení se nemění podél její délky a snadno zjistíme, že všechny námi zkoumané veličiny jsou závislé pouze na souřadnicích x a y .



Obrázek 10.2: Rovinná deformace - opěrná zed'

Podíváme-li se na libovolný příčný řez, zjistíme, že posunutí ve směru osy z jsou nulová a tudíž i deformace $\varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ budou nulové. Vektor deformace se tímto zredukuje a bude mít pouze tři nenulové složky:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.17)$$

Po dosazení $\varepsilon_z = 0$ do rozšířeného Hookova zákona:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \quad (10.18)$$

dostáváme:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10.19)$$

To znamená, že napětí ve směru osy z je na rozdíl od deformace v tomto směru nenulové, dá se však spočítat z hodnot normálových napětí ve dvou směrech roviny. Ostatní složky napětí, se dají vyjádřit z rozšířeného Hookova zákona dosazením $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ do výrazů pro ε_x a ε_y :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{\sigma_x - \nu[\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x - \nu^2\sigma_y] = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu\sigma_y(1 + \nu)] = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu}\sigma_y \right) \\ \varepsilon_y &= \dots = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(-\frac{\nu}{1 - \nu}\sigma_x + \sigma_y \right) \end{aligned}$$

Pro rovinnou deformaci dostáváme tedy matici materiálové poddajnosti:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu^2}{E} & -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & \frac{1 - \nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

Inverzí matice materiálové poddajnosti $[C]$ získáme matici materiálové tuhosti $[D]$. Třemi příkazy pomocí *Maximy*:

```
(C1) C: matrix([(1-nu^2)/E, -nu*(1+nu)/E, 0], [-nu*(1+nu)/E, (1-nu^2)/E, 0], [0, 0, 1/G]);
```

```
(C2) D: factor(invert(C));
```

```
(C3) D_mod: ((nu+1)*(2*nu-1))*D;
```

získáme

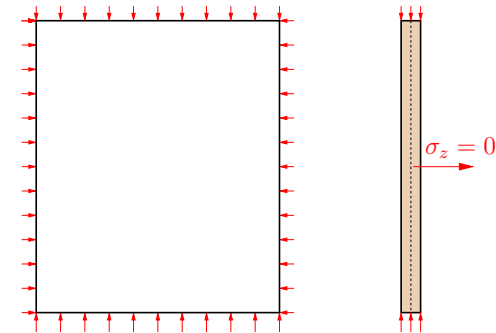
$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{(\nu-1)E}{(\nu+1)(2\nu-1)} & \frac{\nu E}{(\nu+1)(2\nu-1)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(\nu+1)(2\nu-1)} & \frac{(\nu-1)E}{(\nu+1)(2\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \frac{1}{(\nu+1)(2\nu-1)} \begin{bmatrix} (\nu-1)E & \nu E & 0 \\ \nu E & (\nu-1)E & 0 \\ 0 & 0 & (\nu+1)(2\nu-1)G \end{bmatrix}$$

Do této rovnice ještě dosadíme vztah mezi normálovým modulem pružnosti E a modulem pružnosti ve smyku, který je dán $G = E/2(1 + \nu)$. Pro rovinnou deformaci (a lineární izotropní materiál) tedy platí tyto fyzikální rovnice:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10.21)$$

10.2.2 Rovinná napjatost

Na rozdíl od rovinné deformace, kde jsme měli konstrukci, její jeden rozměr byl v porovnání s ostatními rozměry velký, rovinná napjatost zahrnuje konstrukce, které se vyznačují jedním rozměrem zanedbatelným v porovnání se zbylými rozměry. Příkladem takové konstrukce jsou desky. Tenká deska zatížená pouze ve své střednicové rovině z obr. 10.3 je nejčastější ukázkou rovinné napjatosti.



Obrázek 10.3: Rovinná napjatost - tenká deska zatížená ve své střednicové rovině

Uvažujme případ, kdy deska není zatížena zatížením působícím kolmo k její střednicové rovině. Složky vektoru napětí τ_{yz} a τ_{zx} budou nulové na povrchu desky a složka σ_z bude nulová po celé tloušťce desky. Potom zbývající složky vektoru napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ mohou

být brány po výšce jako průměrné hodnoty zcela nezávislé na souřadnici z . Složky γ_{yz} , γ_{zx} jsou nulové, zatímco ε_z se dá vyjádřit pomocí zbývajících nenulových složek vektoru deformace:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (10.22)$$

vektor deformace bude shodný s vektorem deformace z případu rovinné deformace (pouze si musíme uvědomit, že deformace ve směru osy z není nulová):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.23)$$

Do rozšířeného Hookova zákona dosadíme $\sigma_z = 0$. Matice poddajnosti bude mít tvar:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Pomocí *Maximy* nalezneme opět matici materiálové tuhosti $[D]$ inverzí matice materiálové poddajnosti $[C]$:

(C1) `C: matrix([1/E,-nu/E,0],[-nu/E,1/E,0],[0,0,1/G]);`

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{E}{(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{(\nu-1)(\nu+1)} & 0 \\ -\frac{\nu E}{(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{E}{(\nu-1)(\nu+1)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

(C2) `D: factor(invert(C));`

vytkneme výraz $-\frac{1}{(\nu-1)(\nu+1)}$ před matici:

(C3) `D_mod: -1*(nu-1)(nu+1)*D;`

$$D = -\frac{1}{(\nu-1)(\nu+1)} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & -(\nu-1)(\nu+1)G \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

Konstitutivní rovnice pro rovinnou deformaci jsou:

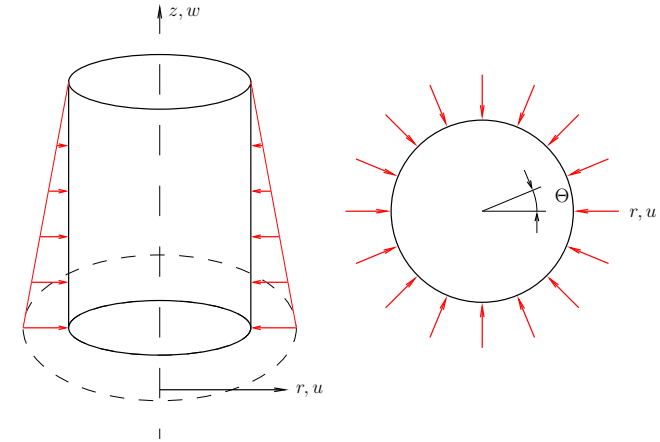
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10.26)$$

10.2.3 Osová souměrnost

Značná část problémů teoretické mechaniky zahrnuje analýzu osově souměrných prvků. Jestliže navíc zatížení takového prvku je rovněž symetrické podél stejné osy, lze s výhodou využít této symetrie. Příkladem takovéto situace může být například válcová podpora mostu, na níž působí pouze hydrostatický tlak okolní vody.

Je samozřejmě velmi výhodné tento problém uvažovat ve válcovém souřadném systému, zobrazeném na obrázku. Z důvodu symetrie, složky vektoru napětí budou nezávislé na souřadnici ϕ a navíc všechny derivace vzhledem k ϕ vymizí. Z tohoto plyne nulovost složek $v, \gamma_{r\phi}, \gamma_{\phi z}, \tau_{r\phi}, \tau_{\phi z}$. Geometrické rovnice pro nenulové složky vektoru deformace budou mít tvar:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (10.27)$$



Obrázek 10.4: Osová souměrnost

Konstitutivní rovnice:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\phi \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ sym & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\phi \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (10.28)$$

10.2.4 Prvek pro rovinnou deformaci

Posunutí (u, v) jsou na rovinném elementu interpolována ze známých uzlových posunutí (u_i, v_i) pomocí bázevých funkcí N_i

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{r} \quad (10.29)$$

kde matice \mathbf{N} je matice bázevých funkcí, \mathbf{u} vektor posunutí a \mathbf{r} vektor uzlových posunutí. Vektor posunutí (po prvku) je pouze funkcí uzlových posunutí, říkáme, že je pomocí bázevých funkcí *aproximován z uzlových posunutí*.

Připomeňme, že při rovinné deformaci platí $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ $\sigma_z \neq 0 = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$. Geometrické rovnice nabydou tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \varepsilon = \partial\mathbf{N}\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (10.30)$$

kde $\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}$ je geometrická matice (STRAIN-DISPLACEMENT MATRIX) a ∂ je operátorová matice. Nyní odvodíme obecný vzorec pro matici tuhosti elementu z energetického principu. Deformační energie v elementu se dá vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (\mathbf{D}\varepsilon)^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varepsilon^T \mathbf{D}\varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_{(V)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (10.31)$$

Obecný výraz pro matici tuhosti elementu má tedy tvar:

$$\mathbf{k} = \int_{(V)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (10.32)$$

Matice \mathbf{D} (pouze v případě 1-D napjatosti je to skalár) se nazývá *matice materiálové tuhosti* a v případě rovinné defomace, bude mít tvar 10.33. Připomeňme si ovšem, že tento vztah platí pouze pro případ lineárního homogenního izotropního materiálu.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

Tento vztah nejlépe odvodíme inverzí rozšířeného Hookova zákona s uvážením počátečních deformací (např. od teploty)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad \varepsilon = \mathbf{C}\sigma \quad (10.34)$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}$$

se nazývá *matice materiálové poddajnosti* a samozřejmě platí $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$.

Fyzikální rovnice s uvážením vlivu počátečních deformací (např. opět vliv teploty) budou mít tvar

$$\sigma = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right) \quad \sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (10.35)$$

vektor počátečních deformací vlivem změny teploty bude

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta t \\ \alpha \Delta t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.36)$$

10.2.5 Prvek pro rovinnou napjatost

Tento prvek bude v zásadě stejný jako prvek pro rovinnou deformaci, jen matice materiálové tuhosti bude mít jiný tvar. Fyzikální rovnice dostaneme snadno nahrazením vztahů pro Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku a ve smyku dle

$$\begin{aligned} E' &= E(1-\nu^2) \\ \nu' &= \nu(1-\nu) \\ G' &= G \end{aligned} \quad (10.37)$$

Matice materiálové tuhosti pro případ rovinné napjatosti bude tedy

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

Pro přehlednost ještě doplníme fyzikální rovnice

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right) \quad \sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (10.39)$$

10.2.6 Statické podmínky rovnováhy (Cauchyho rovnice)

Na začátku této kapitoly jsme připomněli sestavení podmínek rovnováhy ve 3-D na elementárním objemu $dV = dx dy dz$. Uvážíme-li *objemové síly v rovině* (síly na jednotku plochy, např. tíhové síly) budou mít tyto tzv. *Cauchyho rovnice* tvar (jsme v rovině):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \quad (10.40)$$

10.2.7 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou specifikovány jako vnější síly a předepsané posunutí. Posunutí na hranici mohou být jak nulová (homogenní okrajové podmínky), tak mít stanovenou nenulovou hodnotu. V metodě konečných prvků jsou všechny typy zatížení (spojité sílové zatížení, osamělé síly, spojité momentové zatížení či osamělý moment) převáděna na jednotlivé síly působící v uzlových bodech.

Okrajové podmínky se v případě rovinného problému ($\mathbf{u} = \{u, v\}$) dají symbolicky zapsat jako:

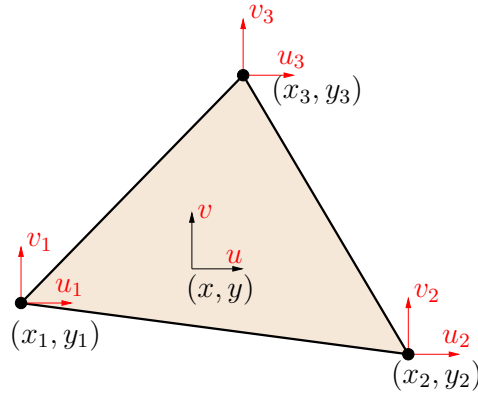
$$\begin{aligned} u &= \bar{u} & v &= \bar{v} \\ t_x &= \bar{t}_x & t_y &= \bar{t}_y \end{aligned} \quad (10.41)$$

kde okrajové sílové podmínky značíme t_x, t_y z důvodu jejich názvu – těmto silám se říká TRACTION FORCES a jsou to vlastně hodnoty napětí na hranici, t.j. např. $t_x = \sigma_x n_x$, kde n_x značí normálu.

10.2.8 Odvození matice tuhosti pro CST-prvek a rovinnou úlohu

Tento element je znázorněn na obr. 10.5. Prvek je definován vektorem uzlových posunutí:

$$r^T = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \} \quad (10.42)$$



Obrázek 10.5: trojúhelníkový prvek konstantní deformace (Constant Strain Triangle)

Posuny uvnitř prvku jsou aproximovány pomocí posunutí uzlových bodů a bázových funkcí ve tvaru:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (10.43)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad N_i = \begin{cases} 1 & \text{v uzlu } i \\ 0 & \text{v ostatních uzlech} \end{cases}$$

Geometrické rovnice lze zapsat pomocí složek vektoru deformace:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \partial N r = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \partial N r = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right) \end{aligned}$$

Což lze symbolicky zapsat pomocí následujícího maticového zápisu (tyto rovnice již byly

pro CST prvek odvozeny v předešlé kapitole, není tedy třeba se k nim detailněji vracet):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{31} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (10.44)$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, že všechny tři složky vektoru deformace jsou po prvku konstantní (odtud název prvku). Jakmile máme vztah mezi vektorem deformace $\{\varepsilon\}$ a koncových posunutí $\{r\}$, máme matici B a můžeme vyjádřit matici tuhosti CST prvku integrací:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$$

Kapitola 11

Deskové prvky

11.1 Předpoklady, deskové teorie

Deska je konstrukce, jejíž dva rozměry jsou výrazně větší než zbývající třetí rozměr. Dle poměru tloušťky desky k jejím zbývajícím rozměrům $\frac{t}{a}$, $\frac{t}{b}$ rozdělujeme desky na:

- tlusté desky: $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$
 - s vlivem smyku
 - Reissner-Mindlinova teorie
 - Timoshenkova teorie ohýb. prutu
- tenké desky: $\frac{1}{10} - \frac{1}{50}$
 - bez vlivu smyku
 - Kirchhoffova teorie
 - Euler-Bernoulli teorie ohýb. prutu
- velmi tenké desky: $< \frac{1}{50}$
 - geometrická nelinearita
 - von Karmánova teorie
 - teorie druhého řádu (podmínky rovnováhy na přetvořeném prutu)

11.2 Kirchhoffova teorie tenkých desek

Předpoklady:

1. geometrická linearita: malé průhyby a malé deformace
2. lineární materiál: platnost Hookova zákona $\sigma = E\varepsilon$
3. tenká deska: $\frac{t}{a,b} \in \langle \frac{1}{5}, \frac{1}{50} \rangle$

Jsou-li splněny uvedené předpoklady, lze výpočty založit na tzv. Bernoulliho hypotéze:

- normály se nedeformují (neprodužují)

$$\varepsilon_z = 0$$

- zanedbání Poissonova efektu

$$\sigma_z = 0$$

11.2.1 Kinematické rovnice

střednicová rovina:

- průhyby

$$w = w(x, y)$$

- pootočení materiálového bodu

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\phi_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

- posuny bodu $P(x, y, z)$:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \phi_y$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \phi_x$$

$$w$$

11.2.2 Geometrické rovnice

Vztahy mezi vektorem posunutí a vektorem deformace.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z \kappa_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z \kappa_y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \kappa_{xy}$$

vektor deformace bude mít tedy pouze tři nenulové složky:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \kappa_x \\ -z \kappa_y \\ -2z \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

11.2.3 Statické rovnice

Zde ve tvaru moment-krivost.

Předpokládejme opět lineární elastický materiál, platnost Hookova zákona. Fyzikální rovnice můžeme psát ve tvaru:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Dosaďme nyní tyto fyzikální rovnice do podmínek rovnováhy pro vnitřní síly. Ohybový moment na jednotku délky získáme snadno jako výslednice příslušného napětí:

$$m_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(-z) dy dz \Rightarrow m_x = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

Obdobně i ostatní složky ohybových momentů:

$$\begin{aligned} m_x &= - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \\ m_y &= - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \\ m_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \end{aligned}$$

Tyto rovnice přepíšeme do maticové formy a zároveň dosaďme za napětí $\sigma = -zD\kappa$:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z(-z) \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} [D] \{\kappa\} = \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

výraz $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ se nazývá *desková tuhost*. Celá matice $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$ je pak matice tuhosti izotropního materiálu při rovinné napjatosti. Známe-li momenty m_x , m_y a m_{xy} snadno dopočteme napětí z podmínek rovnováhy:

$$m_x = \frac{1}{2} \sigma_x \frac{h}{2} \frac{h}{3} = \frac{1}{6} \sigma_x h^2 \Rightarrow \sigma_x = \frac{6m_x}{h^2}$$

obdobně i pro zbývající napětí:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pm \frac{6m_x}{h^2} \\ \sigma_y &= \pm \frac{6m_y}{h^2} \\ \tau_{xy} &= \pm \frac{6m_{xy}}{h^2} \end{aligned}$$

Nyní provedme na infinitesimálním elementu podmínky rovnováhy. Nejprve ve svislém směru:

$$-t_x dy - t_y dx + \left(t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(t_y + \frac{\partial t_y}{\partial y} dy \right) dx + q_0 dx dy = 0$$

po odečtení některých členů a vydělení rovnice $dA = dx dy$ vychází:

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + q_0 = 0 \quad (11.2)$$

Obdobným způsobem z momentových podmínek rovnováhy získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + t_x &= 0 \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + t_y &= 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

Z rovnice 11.3 vyjádříme posouvající síly t_x a t_y :

$$\begin{aligned} t_x &= - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \\ t_y &= - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} \end{aligned}$$

a dosaďme do 11.2:

$$- \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q_0 = 0$$

Úpravou získáme důležitý vztah:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = q_0 \quad (11.4)$$

11.2.4 Biharmonická rovnice desky

Zapišme symbolicky geometrické rovnice:

$$\kappa = Pw$$

kinematické rovnice:

$$M = D\kappa$$

a konečně statické rovnice:

$$P^T M = q$$

V těchto rovnicích je P symbolický operátorový vektor obsahující druhé derivace:

$$P^T = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}$$

vektor κ je vektor deskových krivostí:

$$\kappa^T = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}$$

a vektor momentů M :

$$M^T = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$$

Upravme nyní pomocí těchto výrazů statické rovnice:

$$q = P^T M = P^T D \kappa = P^T D P w = \nabla^2 D \nabla^2 w = D \nabla^4 w$$

kde ∇^4 je biharmonický operátor definovaný jako součet parciálních derivací:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Získali jsme tedy velmi důležitý vztah pro desku, který se nazývá *desková rovnice*:

$$D \nabla^4 w = q \quad (11.5)$$

Je vhodné si ihned všimnout podobnosti s úplnou diferenciální rovnicí ohybové čáry u Euler-Bernoulli teorie ohybaného prutu: $EI w^{IV} = q$ a srovnat výraz pro *ohybovou tuhost prutu EI s deskovou tuhostí D*.

11.2.5 Funkcionál potenciální energie

$$\Pi(w) = U(w) - W(w)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} M^T \kappa \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \kappa^T D \kappa \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} w^T P^T D P w \, d\Omega$$

$$W(w) = \int_{(\Omega)} q w \, d\Omega + \int_{(\Gamma)} \tilde{t} w - \tilde{m} \phi \, d\Gamma$$

11.2.6 Hellinger-Reissnerův princip

funkcionál

$$\Pi(w, M) = U(w, M) - W(w, M)$$

deformační energie:

$$U(w, M) = \int_{(\Omega)} \left(M^T \kappa - \frac{1}{2} M^T D^{-1} M \right) \, d\Omega$$

11.2.7 Výpočet matice tuhosti (doplnit později)

Trojúhelníkový prvek DKT (Discrete Kirchhoff Theory)

Ve funkcionálu potenciální energie se objevují nejvýše první deriva hledaných funkcí. Proto je v tomto případě na hledané aproximace funkcí w , ϕ_x a ϕ_y kladena pouze podmínka C^0 spojitosti (spojitost funkčních hodnot). část energie, která přísluší posouvajícím silám se při konstrukci funkcionálu zanedbá a v diskrétních bodech se zavede

požadavek zachování normál po deformaci. Tento předpoklad je správný, neboť i experimenty prokázaly, že pro tenké desky je energie příslušná smyku zanedbatelná ve srovnání s ohybovou energií.

vektor uzlových posunutí:

$$r = \{ w_1 \ \phi_{x1} \ \phi_{y1} \ w_2 \ \phi_{x2} \ \phi_{y2} \ w_3 \ \phi_{x3} \ \phi_{y3} \}^T$$

z podmínek nulové smykové deformace platí následující geometrické vztahy:

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\phi_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

pootočení ϕ_x a ϕ_y jsou aproximována pomocí básových funkcí a uzlových pootočení:

$$\phi_x = N_1 \phi_{x1} + N_2 \phi_{x2} + N_3 \phi_{x3}$$

$$\phi_y = N_1 \phi_{y1} + N_2 \phi_{y2} + N_3 \phi_{y3}$$

protože se jedná o lineární trojúhelníkový prvek, budou aproximační funkce N_i rovny přímo trojúhelníkovým souřadnicím odvozeným v 9.1.2, tedy:

$$N_i = \xi_i = \frac{A_i}{A}$$

Aby byla splněna Kirchhoffova hypotéza, pro aproximaci funkcí $\frac{\partial w}{\partial s}$ a ϕ_n se volí kvadratické polynomy, které jsou ztotožněny ve třech bodech každé strany. Je zřejmé, že na hranicích mezi prvky je zachována spojitost funkcí w , $\frac{\partial w}{\partial s}$, ϕ_s i ϕ_n .

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (11.7)$$

Aproximace pootočení ϕ_x a ϕ_y se pak zapíše pomocí aproximačních funkcí $N_{x1}, N_{y1}, \dots, N_{x6}, N_{y6}$:

$$N_{x1} = -1.5 (d_6 N_6 - d_5 N_5)$$

$$N_{x2} = N_1 - e_5 N_5 - e_6 N_6$$

$$N_{x3} = b_5 N_5 + b_6 N_6$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Matice tuhosti se pak vypočte dle:

$$K = \int_{(A)} B^T D_o B \, dA$$

kde D_o matice tuhosti izotropního materiálu při rovinné napjatosti daná pomocí:

$$D_o = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

11.3 Mindlinova teorie tlustých desek

Kapitola 12

Úvod do dynamiky v MKP

Až dosud jsme se zabývali analýzou konstrukcí zatížených staticky, t.j. zatížení se měnilo velmi pomalu, nebylo tedy třeba brát v úvahu vliv setrvačných sil, které jsou důsledkem zrychlení konstrukce, nebo její částí. Dynamika se zabývá vlivem setrvačných sil, kdy zatížení působící na konstrukci způsobují její *rozkmitání*. Těmito zatíženími bývají nejčastěji

- pohyblivé zatížení
- rotující stroje
- náraz hmotných předmětů
- účinky větru
- zemětřesení
- účinky exploze

Úlohy dynamiky lze v zásadě rozdělit do dvou hlavních kategorií: volné kmitání a vynucené kmitání. Ze základního kurzu dynamiky (MEC2) si pamatujeme, že oproti statické analýze nám do výpočtu vstupuje další důležitá veličina - *hmotnost* (a s ní spojené setrvačné síly, které se objeví v pseudostatických podmínkách rovnováhy). V MKP toto znamená, že v maticovém zápisu podmínek rovnováhy se nám objeví další matice - *matice hmotnosti*. Tu budeme uvažovat ve dvou základních variantách, jako *konzistentní matici hmotnosti* (CONSISTENT MASS MATRIX) a *nekonzistentní matici hmotnosti* (LUMPED MASS MATRIX). První z nich lze odvodit pomocí variačního principu, v dynamice použijeme *Hamiltonův princip*, což je variační princip zohledňující historii posunutí.

12.1 Variační princip v dynamice - Hamiltonův princip

Jak už bylo řečeno, v dynamice používáme jako variační princip Hamiltonův, který využívá funkcionál L , tzv. *Lagrangian*, definovaný pomocí:

$$L = K - U - W_p \quad (12.1)$$

kde K je kinetická energie tělesa, U je jeho deformační energie a W_p je práce vnějších sil. Výraz pro kinetickou energii zavedeme pomocí její hustoty dK :

$$dK = \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \quad (12.2)$$

kde ρ je objemová hustota a tečka nad $\{u\}$ značí derivaci dle času, v tomto případě tedy *rychlost*. Práci vnějších sil zapíšeme pomocí jejího přírůstku:

$$dW_p = -\{u\}^T \{\bar{X}\} dV - \{u\}^T \{\bar{T}\} dS \quad (12.3)$$

kde \bar{X} jsou *objemové síly*, t.j. síly na jednotku objemu (příkladem může být tíhová síla), a \bar{T} jsou síly působící na hranici, tzv. TRACTION FORCES. Deformační energie se dá vyjádřit pomocí materiálové matice tuhosti $[D]$, nebo materiálové matice poddajnosti $[C]$:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} dV \\ &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \end{aligned} \quad (12.4)$$

Funkcionál z rovnice 12.1 pro lineární elastický materiál bude mít podobu:

$$L = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} + 2\{u\}^T \{\bar{X}\}) dV + \int_{(S)} \{u\}^T \{\bar{T}\} dS \quad (12.5)$$

Hamiltonův princip lze slovně vyjádřit takto:

Ze všech možných historií posunutí mezi dvěma časovými okamžiky t_1 a t_2 , které vyhovují podmínkám kompatibility a kinematickým okrajovým podmínkám, nastane ta z nich, pro kterou nabývá Lagrangian minimální hodnoty, t.j. integrál rozdílu kinetické a potenciální energie je stacionární.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (12.6)$$

Dosadíme-li do 12.1 výrazy pro vektor posunutí $\{u\} = [N]\{r\}$ a vektor deformace $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{r\} = [B]\{r\}$, získáme:

$$L = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\{r\}^T [B]^T [D] [B] \{r\} - \rho \{\dot{r}\}^T [N]^T [N] \{\dot{r}\} - 2\{r\}^T \{\bar{X}\}) dV - \int_{(S)} \{r\}^T [N]^T \{\bar{T}\} dS \quad (12.7)$$

Použijeme-li variačního principu z 12.6, obdržíme:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\{\delta r\}^T \int_{(V)} [B]^T [D] [B] dV \{r\} - \{\delta \dot{r}\}^T \int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \{\dot{r}\} - \right. \\ \left. - \{\delta r\}^T \int_{(V)} [N]^T \{\bar{X}\} dV - \{\delta r\}^T \int_{(S)} [N]^T \{\bar{T}\} dS \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (12.8)$$

nyní integrujeme druhý člen podle času pomocí per partes:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \{\delta \dot{r}\}^T \int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \{\dot{r}\} dt = \left[\{\delta \dot{r}\}^T \int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \{\dot{r}\} \right]_{t_1}^{t_2} - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \{\delta r\}^T \int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \{\ddot{r}\} dt \end{aligned} \quad (12.9)$$

Podle Hamiltonova principu musí být platit: $\{\delta r(t_1)\} = \{\delta r(t_2)\} = \{0\}$, to znamená, že první člen za rovnítkem ve výrazu 12.9 musí být roven nule. Dosadíme-li zbývající do 12.8 a vytkneme-li $\{\delta r\}^T$, obdržíme:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \{\delta r\}^T \left(\int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \{\dot{r}\} + \int_{(V)} [B]^T [D] [B] dV \{r\} - \right. \\ \left. - \int_{(V)} [N]^T \{\bar{X}\} dV - \int_{(S)} [N]^T \{\bar{T}\} dS \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (12.10)$$

Protože posunutí $\{\delta r\}$ jsou virtuální (nenulová), musí celý výraz ve velké závorce být nula. Tímto dostáváme *pohybové rovnice pro element*:

$$[m]\{\ddot{r}\} + [k]\{r\} = \{f\} \quad (12.11)$$

kde $[m]$ je *konzistentní matice hmotnosti elementu* definovaná pomocí:

$$[m] = \int_{(V)} \rho [N]^T [N] dV \quad (12.12)$$

$[k]$ je *matice tuhosti elementu* a $\{f\}$ je *vektor uzlového zatížení*.

12.2 Matice hmotnosti

V předchozím odstavci jsme pomocí Hamiltonova principu odvodili pohybové rovnice pro element, přičemž jsme odvodili také výraz pro konzistentní matici hmotnosti elementu. V MKP se však často používá nekonzistentní matice hmotnosti a to zejména z důvodů úspory paměti. Nekonzistentní matice hmotnosti je totiž diagonální a kromě zmiňovaných úspor paměti také výrazně snižuje náročnost výpočtu (násobení diagonální maticí je snadné).

Uveďme nejprve příklad výpočtu konzistentní matice hmotnosti pro jednoduchý případ taženého-tlačeného prvku. Připomeňme, že bázové funkce pro tento prvek mají tvar: $N_1 = 1 - \xi$ a $N_2 = \xi$. Konzistentní matice hmotnosti bude tedy:

$$\begin{aligned} m &= \int_{-1}^1 \rho \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{Bmatrix} Al d\xi = \rho AL \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1 - \xi)^2 & \xi - \xi^2 \\ \xi - \xi^2 & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pro stanovení nekonzistentní matice hmotnosti použijeme následujícího postupu. Hmotnost prvku soustředíme do jeho uzlových bodů. Toto lze provést pouze u jednoduchých prvků - např. u prutového prvku. Pro náš případ taženého-tlačeného prvku je to velmi snadné - polovinu celkové hmotnosti prvku přidělíme do každého uzlu:

$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Al}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}$$

U složitějších prvků toto nelze jednoduše provést a proto se používá tzv. metody kondenzace - vypočítáme konzistentní matici hmotnosti a ponechají se pouze její diagonální členy, ostatní se nahradí nulami. Tímto postupem ovšem není zachována celková hmotnost prvku a proto je třeba diagonální prvky přenásobit takovým koeficientem, který nám celkovou hmotnost zaručí. Tento koeficient bude:

$$\xi = \Delta \frac{M_{el}}{\sum_{i=1}^n m_{vi}}$$

kde Δ je dimenzionalita problému ($\Delta=1$ pro jednorozměrný prvek, $\Delta=2$ pro dvourozměrný a $\Delta=3$ pro prostorový prvek, M_{el} je hmotnost elementu a m_{vi} jsou diagonální prvky matice hmotnosti příslušející pouze posuvným stupňům volnosti).

Uveďme jednoduchý příklad prutového elementu se čtyřmi stupni volnosti - dva rotační a dva posuvné v každém uzlovém bodě. Do každého uzlu máme soustředit poloviční

hmotnost prvku, t.j. $\rho Al/2$. Nekonzistentní matice hmotnosti prvku tedy bude (ve směru rotačních stupňů volnosti je 0):

$$[m] = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Doplňme výraz pro konzistentní matici hmotnosti pro tentýž prvek (lze snadno odvodit integrací $m = \int_V \rho N^T N dV$ známých bázových funkcí N_i pro $i = 1, 2, 3, 4$). Nezapomeňme na Jacobián transformace $J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}l$:

$$[m] = \rho A \int_{-1}^1 N^T N \frac{l}{2} d\xi = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Tato matice hmotnosti zachovává translační i rotační setrvačnost (stupně volnosti na prvku jsou dány vektorem koncových neznámých: $r = \{v_i \ \phi_i \ v_j \ \phi_j\}^T$. Sestavení diagonální matice hmotnosti je zřejmé pro členy m_{11} a m_{33} , tedy členy u posuvných stupňů volnosti. V každém uzlu musí být ve směru translačního stupně volnosti poloviční hmotnost: $\frac{1}{2}\rho Al$ (toto vychází samozřejmě i součtem "translačních" prvků konzistentní matice hmotnosti - m_{11} a m_{33} - dostáváme tak $\rho Al \frac{156+54}{420} = \frac{1}{2}\rho Al$). Pro prvky ve směru rotačních stupňů volnosti se v případě tohoto prvku obvykle volí nezáporná hodnota ve tvaru αml^2 , kde $\alpha \in (0; \frac{1}{50})$. (Moment setrvačnosti prutu ke koncovému, resp. střednímu bodu je $\frac{1}{3}ml^2$, resp. $\frac{1}{12}ml^2$). Nekonzistentní matice hmotnosti ohýbaného prutu tedy bude:

$$[m] = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha l^2 \end{bmatrix}$$

Ukažme si ještě rozdíl mezi nekonzistentní a konzistentní maticí hmotnosti na případu trojúhelníkového prvku konstantní deformace (CST). Nekonzistentní matice hmotnosti prvku CST:

$$[m] = \frac{\rho h A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jeho konzistentní matice hmotnosti:

$$[m] = \rho h \int_{(A)} [N]^T [N] dA = \frac{\rho h A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pro prvky vyššího řádu je postup sestavení nekonzistentní matice hmotnosti obdobný, uveďme si příklad prutového elementu s mezilehlým uzlem. V každém uzlu je definováno pouze jedno uzlové posunutí: $r = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T$. Stupně volnosti jsou sestaveny

tak, že nejprve jsou očíslovány krajní uzly 1, 2 a nakonec prostřední uzel 3. Pomocí bazových funkcí $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$, $N_3(\xi)$ snadno odvodíme konzistentní matici hmotnosti:

$$[m] = \rho A \int_{-1}^1 N^T N \frac{l}{2} d\xi = \frac{\rho Al}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Chceme-li odvodit nekonzistentní matici hmotnosti pro tento prvek, logicky přiřadíme menší část hmotnosti prvku do koncových bodů a větší část do prostředního uzlu. V předmětu "kinematika a dynamika" se podobným způsobem převáděl prostý nosník na kmitání s jedním způsobem volnosti: do krajních bodů se umístila šestina celkové hmotnosti prutu $\frac{1}{6}\rho Al$ a střední části se přiřadily zbývající dvě třetiny hmotnosti prutu $\frac{2}{3}\rho Al$. Stejněho výsledku dosáhneme aplikací postupu převedení konzistentní matice hmotnosti na nekonzistentní. Sečteme postupně všechny členy v jednotlivých řádcích a výsledek umístíme na diagonálu:

$$[m] = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{4-1+2}{30} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+4+2}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2+2+16}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho Al}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{3} \end{bmatrix}$$

12.2.1 Globalizace matice hmotnosti

Podobně jako tomu bylo u matice tuhosti, matice hmotnosti jsou nejprve sestaveny v lokálním souřadném systému definovaném pro element a teprve při tzv. globalizaci je účinek matice hmotnosti jednotlivých elementů promítnut do globální matice hmotnosti (matice hmotnosti konstrukce). Globalizace se dá provést opět pomocí transformační matice:

$$\bar{M} = T^T M T \quad (12.13)$$

kde \bar{M} je matice hmotnosti v lokálním souřadném systému, T je transformační matice odvozená v a M je matice hmotnosti elementu v globálním souřadném systému.

Transformační matice T je v principu transformační matice odvozená v kapitole 5.6, s několika výjimkami. Za prvé transformační matice T pro transformaci posunutí může být obdélníková. Například při odvozování globální matice tuhosti taženého-tlačeného prvku mohl mít vektor posunutí pouze dva členy: $r = \{ u_1 \ u_2 \}$. Potom při globalizaci do 2D či 3D je transformační matice rozměru 2×2 , či 3×3 . Transformace pro matici tuhosti funguje správně, neboť lokální matice tuhosti má nulové členy v odpovídajících směrech. Tato transformace by však nefungovala správně pro transformační matici hmotnosti. Závěr tedy je, že lokální matice hmotnosti musí mít všechny translační členy. Pro tažený-tlačený prvek musíme tedy definovat vektor uzlových posunutí včetně posunů kolmých ke střednici prutu (v_i):

$$u = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \}^T \quad (12.14)$$

Konzistentní a diagonální matice hmotnosti v lokálních souřadnicích budou:

$$M_{cons} = \frac{1}{6}\rho Al \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{diag} = \frac{1}{2}\rho Al \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

Globalizaci provedme pomocí 12.13. Nejprve pro diagonální matici hmotnosti:

$$M_{diag} = T^T \bar{M}_{diag} T = \frac{1}{2}\rho Al T^T I_4 T = \frac{1}{2}\rho Al T^T T = \frac{1}{2}\rho Al I_4 \quad (12.16)$$

Je zřejmé, že globální matice hmotnosti je shodná s lokální maticí hmotnosti. Pro konzistentní matici hmotnosti bude transformace:

$$M_{cons} = T^T \bar{M}_{cons} T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \frac{1}{6}\rho Al \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

Kde $c = \cos \alpha$ a $s = \sin \alpha$. Po provedení maticového násobení zjistíme, že dojdeme ke stejnému závěru jako u diagonální matice hmotnosti ($T^T \bar{M}_{cons} T = \bar{M}_{cons}$) a to díky členům $(c^2 + s^2)$ a $(cs - sc)$ a blokové formě matice hmotnosti. Toto lze dokázat následovně. Na chvíli seřadme vektor koncových posunutí takto: $u = \{ u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2 \}^T$ - tedy nejprve posunutí ve směru osy x a pak posunutí ve směru osy y . Dále zapišme matici hmotnosti pomocí dvou submatic \tilde{M} . Matici transformace můžeme díky přeskupení vektoru posunutí přepsat rovněž pomocí submatic s kosiny a sínými:

$$\bar{M}_{cons} = \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} cI_2 & sI_2 \\ -sI_2 & cI_2 \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

kde

$$\tilde{M} = \frac{1}{6}\rho Al \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

Proveďme nyní transformaci:

$$\begin{aligned} M_{cons} &= T^T \bar{M}_{cons} T = \begin{bmatrix} cI_2 & -sI_2 \\ sI_2 & cI_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cI_2 & sI_2 \\ -sI_2 & cI_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (c^2 + s^2)\tilde{M} & (cs - sc)\tilde{M} \\ (sc - cs)\tilde{M} & (c^2 + s^2)\tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.20)$$

Z uvedeného plyne, že transformace tzv. *diagonální matice s opakujícími se bloky* je rovna té samé matici. Důležitý závěr pro transformaci matice hmotnosti je následující: Bloková matice hmotnosti (lokální) se globalizuje ve stejnou matici tehdy, když všechny stupně volnosti jsou *translační* a když všechny patří do stejného globálního souřadného systému. Těto vlastnosti je samozřejmě vhodné využít a pro matice hmotnosti přeskočit transformaci z lokálního do globálního souřadného systému.

Uvedeného postupu nelze použít v následujících případech:

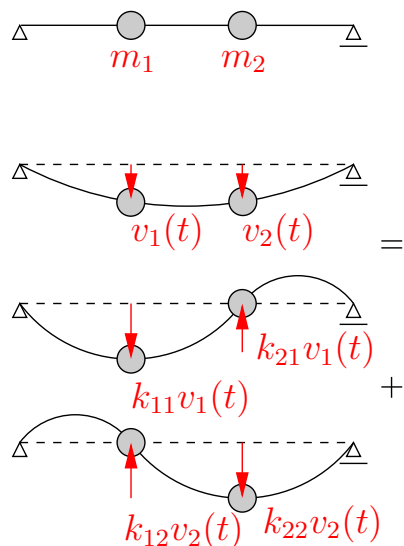
- element má jiné než translační stupně volnosti
- bloky v matici hmotnosti nemají stejnou velikost (např. element s křivými hranami, skořepinový element)

V těchto případech je nutno použít obvyklého transformačního vztahu 12.13.

12.3 Vlastní kmitání s více stupni volnosti

12.3.1 Metoda konstant tuhosti

Uvažujme vlastní kmitání pružného prostě podepřeného nosníku z obrázku 12.1. Kmitání budeme řešit jako kmitání soustavy se dvěma stupni volnosti. Do třetin rozpětí



Obrázek 12.1: kmitání nosníku se dvěma stupni volnosti

nosníku umístíme hmotné body a do nich soustředíme odpovídající část hmotnosti nosníku.

Zapišme pohybové rovnice (podmínky rovnováhy sil působících na jednotlivé hmotné body ve směru kmitání):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{v}_1 + k_{11}v_1 + k_{12}v_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{v}_2 + k_{21}v_1 + k_{22}v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12.21)$$

Řešení této soustavy homogenní diferenciálních rovnic druhého řádu hledíme ve tvaru:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_1^0 \sin \omega t \\ v_2(t) &= v_2^0 \sin \omega t \end{aligned}$$

Dvakrát derivujeme dle času a dosadíme zpět do 12.21:

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 v_1^0 \sin \omega t + k_{11} v_1^0 \sin \omega t + k_{12} v_2^0 \sin \omega t &= 0 \\ -m_2 \omega^2 v_2^0 \sin \omega t + k_{21} v_1^0 \sin \omega t + k_{22} v_2^0 \sin \omega t &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice můžeme dělit $\sin \omega t$:

$$\begin{aligned} [k_{11} - m_1 \omega^2] v_1^0 + k_{12} v_2^0 &= 0 \\ k_{21} v_1^0 + [k_{22} - m_2 \omega^2] v_2^0 &= 0 \end{aligned} \quad (12.22)$$

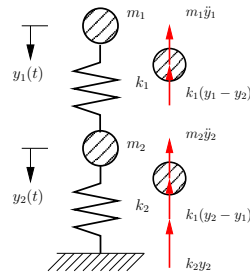
Podmínkou existence netriviálního řešení soustavy lineárních algebraických rovnic je rovnost determinantu matice levé strany nule:

$$(k_{11} - m_1 \omega^2)(k_{22} - m_2 \omega^2) - k_{12} k_{21} = 0$$

Toto je polynom čtvrtého stupně pro ω . Snadno se lze přesvědčit, že této rovnici odpovídají dvě různá řešení větší než nula.

$$0 < \omega_1 < \omega_2$$

Pro kmitání s více stupni volnosti platí, že lze stanovit maximálně tolik vlastních frekvencí (a jim odpovídajících vlastních tvarů), kolik má daná soustava stupňů volnosti. Dosadíme-li vypočtené hodnoty vlastních frekvencí ω_i zpět do 12.22, zjistíme, že tyto rovnice jsou lineárně závislé, t.j. není možné spočítat hodnoty výchylek odpovídající jednotlivým vlastním frekvencím, pouze jejich vzájemný poměr. Toto si ukážeme názorněji na příkladu v následující kapitole.



Obrázek 12.2: kmitání se dvěma stupni volnosti

12.3.2 Příklad (metoda konstant tuhosti)

Soustava dvou hmotných bodů m_1 a m_2 kmitá na pružinách o tuhostech k_1 resp. k_2 . Určete vlastní kruhové frekvence volného kmitání a sestavte pohybové rovnice.

Řešení:

V čase proměnné vertikální výchylky obou hmotných bodů označme $y_1(t)$ a $y_2(t)$. Na hmotné body působí tíhové síly, vratné síly způsobené stlačením, či protažením pružin a setrvačné síly. Posune-li se hmota m_1 o výchylku y_1 a zároveň hmota m_2 o y_2 , vznikne v pružině lvrtná síla o velikosti $k_1(y_1 - y_2)$. Protože se jedná o vlastní kmitání, tíhové síly působící na hmotné body by se objevily na pravé straně pohybových rovnic a na vlastní kruhové frekvence kmitání nemají vliv (v zápisu vynecháváme). Pohybové rovnice (pseudostatické podmínky rovnováhy ve směru kmitání):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) + k_2 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

přepíšeme maticově:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

řešení této soustavy homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu budeme hledat ve tvaru:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1^0 \sin \omega t \\ y_2(t) &= y_2^0 \sin \omega t \end{aligned}$$

pro dosazení budeme potřebovat druhé derivace dle času:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= -\omega^2 y_1^0 \sin \omega t \\ \ddot{y}_2(t) &= -\omega^2 y_2^0 \sin \omega t \end{aligned}$$

po dosazení a jednoduché upravení:

$$\begin{bmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12.23)$$

podmínka řešitelnosti soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(k_{11} - m_1 \omega^2) (k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1^2 = 0$$

po dosazení dostaneme:

$$(10 - 5\omega^2) (10 + 20 - 10\omega^2) - 100 = 0$$

$$\omega^2 = \begin{cases} 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{1} = 1 \text{ s}^{-1} \\ 4 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{4} = 2 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Hodnoty vlastních kruhových frekvencí soustavy ω_1, ω_2 dosadíme do 12.23. Obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé výchylky (resp. amplitudy výchylek) y_1^0 a y_2^0 :

$$\begin{bmatrix} 10 - 5 & -10 \\ -10 & 30 - 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Snadno zjistíme, že se jedná o soustavu závislých rovnic (druhá rovnice je lineární kombinací první), ze které nelze spočítat hodnoty výchylek y_1^0 a y_2^0 , pouze jejich poměr:

$$\begin{aligned} 5y_1 - 10y_2 &= 0 \\ -10y_1 + 20y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{y_1^0}{y_2^0} = \frac{2}{1}$$

Výsledné pohybové rovnice vlastního kmitání soustavy hmotných bodů budou mít tedy tvar:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2 \sin t \\ y_2(t) &= 1 \sin 2t \end{aligned}$$

12.4 Řešení kmitání pomocí MKP

Aplikaci Hamiltonova principu snadno dojdeme k výchozím rovnicím pro řešení jednotlivých druhů kmitání. V základním kurzu dynamiky jsme kmitání rozdělovali na čtyři skupiny, na kmitání *vlastní netlumené*, *vlastní tlumené*, *vynucené netlumené* a *vynucené tlumené*. Jednoduchou analogií k pseudostatickým podmínkám rovnováhy dospějeme k základním rovnicím pro jednotlivé typy kmitání.

Kmitání vlastní netlumené:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [K] \{r\} = \{0\} \quad (12.24)$$

vlastní tlumené:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [C] \{\dot{r}\} + [K] \{r\} = \{0\} \quad (12.25)$$

vynucené netlumené:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [K] \{r\} = \{F_1\} \sin \omega_1 t \quad (12.26)$$

vynucené tlumené:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [C] \{\dot{r}\} + [K] \{r\} = \{F_1\} \sin \omega_1 t \quad (12.27)$$

Význam jednotlivých členů v těchto rovnicích je zřejmý, pro úplnost stručně zopakujeme:

- $[M]$ matice hmotnosti
- $\{\ddot{r}\}$ vektor uzlových zrychlení
- $[C]$ matice tlumení
- $\{\dot{r}\}$ vektor uzlových rychlostí
- $\{F_1\}$ vektor amplitud budících sil
- ω_1 kruhová frekvence budící síly

12.5 Vlastnosti vlastních tvarů

Pro vlastní netlumené kmitání platí maticový zápis podmínek rovnováhy:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

kde M je matice hmotnosti celé soustavy a K je matice tuhosti soustavy. Řešení hledáme ve známém tvaru, který zapíšeme do sloupcového vektoru $\{r(t)\}$:

$$\begin{aligned} \{r(t)\} &= \{r^0\} \sin \omega t \\ \{\ddot{r}(t)\} &= -\omega^2 \{r^0\} \sin \omega t \end{aligned}$$

Po dvojnásobím derivování tohoto výrazu dle času a dosazení do podmínek rovnováhy získáme:

$$-[M] \omega^2 \{r^0\} \sin \omega t + [K] \{r^0\} \sin \omega t = \{0\}$$

z čehož plyne důležitá rovnice pro vlastní kmitání:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{r^0\} = \{0\} \quad (12.28)$$

12.5.1 Ortogonalita vlastních tvarů

Z rovnice 12.28 platí pro každou vlastní frekvenci ω_i a ω_j :

$$\begin{aligned} -\omega_i^2 M r_i + K r_i &= 0 \\ -\omega_j^2 M r_j + K r_j &= 0 \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici zleva r_j^T a druhou rovnici (rovněž zleva) r_i^T :

$$\begin{aligned} -\omega_i^2 r_j^T M r_i + r_j^T K r_i &= 0 \\ -\omega_j^2 r_i^T M r_j + r_i^T K r_j &= 0 \end{aligned} \quad (12.29)$$

Transpozicí vztahu $r_j^T M r_i$ a obdobně vztahu $r_i^T K r_j$ dostaneme:

$$\begin{aligned} (r_j^T M r_i)^T &= r_i^T M^T r_j \\ (r_j^T K r_i)^T &= r_i^T K^T r_j \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii matic M a K tudíž platí:

$$\begin{aligned} r_j^T M r_i &= r_i^T M r_j \\ r_j^T K r_i &= r_i^T K r_j \end{aligned} \quad (12.30)$$

Po uvážení těchto vlastností a sečtení rovnic 12.29 dostaneme:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) r_i^T M r_j = 0$$

Vlastní kruhová frekvence ω_i je různá od ω_j . Potom můžeme psát:

$$r_i^T M r_j = 0$$

Toto se dá slovy vyjádřit takto: *Vlastní vektory jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti*. Stručně se říká, že vlastní tvary jsou *M-ortogonální*.

Nyní vynásobme první rovnici ve vztahu 12.29 $\frac{1}{\omega_i^2}$ a obdobně druhou $\frac{1}{\omega_j^2}$:

$$\begin{aligned} -r_j^T M r_i + \frac{1}{\omega_i^2} r_j^T K r_i &= 0 \\ -r_i^T M r_j + \frac{1}{\omega_j^2} r_i^T K r_j &= 0 \end{aligned}$$

rovnice sečteme a uvažme 12.30:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) r_i^T K r_j = 0$$

Toto se dá slovy vyjádřit takto: *Vlastní vektory jsou ortogonální i vzhledem k matici tuhosti*. Stručně: vlastní vektory jsou *K-ortogonální*.

Jak už vyplynulo z předchozí kapitole, velikosti vlastních tvarů nemají žádný fyzikální význam, proto je zvykem vlastní tvary normovat vzhledem k matici hmotnosti. Toto se projeví jako velmi výhodné při řešení kmitání rozvojem do vlastních tvarů. Chceme-li vlastní tvary normovat vzhledem k matici hmotnosti, budeme chtít, aby platilo:

$$r_i^T M r_j = I \quad (12.31)$$

kde I je jednotková matice. Pro normovaný vlastní tvar bude tedy platit:

$$r_{i,norm} = \frac{r_i}{\sqrt{r_i^T M r_i}} \quad (12.32)$$

dosadíme 12.31 do první rovnice v 12.29:

$$-\omega_i^2 I + r_j^T K r_i = 0$$

ihned je vidět, že:

$$r_i^T K r_j = \omega_i^2$$

Nejčastěji se s vlastními tvary pracuje v tomto tvaru, t.j. vlastní tvary jsou ortonormální vzhledem k matici hmotností, stručně *M-ortonormální*.

Zapamatujte si důležitý poznatek o volném kmitání soustav s více stupni volnosti:

- Velikosti posunutí a z nich odvozené veličiny (např. napětí) nemají v *vlastního kmitání* smysl, či fyzikální význam.

12.6 Tlumené kmitání

Uvažujeme vynucené tlumené kmitání. Toto kmitání je určené pohybovou rovnicí:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{F(t)\} \quad (12.33)$$

Kde $[C]$ je *matice viskózního tlumení*. Obecně by se konzistentní matice tlumení elementu dala získat obdobně jako konzistentní matice hmotností pomocí vztahu:

$$C = \int_V N^T \mu N dV$$

V praxi se však tento vztah nevyužívá, neboť koeficienty lineárního tlumení μ je velmi složité získat, ale protože vliv tlumení je obecně menší než vliv setrvačnosti a tuhosti, je možné matici tlumení určit ve tvaru lineární kombinace matice hmotností a tuhosti:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (12.34)$$

kde α a β jsou proporciální koeficienty zohledňující vliv rychlosti uzlových bodů a rychlosti deformace. Tyto proporciální koeficienty získáme pomocí experimentálního měření. Tomuto typu tlumení se říká Rayleighovo tlumení.

12.7 Řešení vlastního kmitání

Úlohou vlastního kmitání je nalézt vlastní kruhové frekvence a jim příslušné vlastní tvary kmitání. Pro případ vlastního kmitání nabyde pohybová rovnice tvaru:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [K]\{r\} = \{0\} \quad (12.35)$$

Řešení této diferenciální rovnice hledíme ve tvaru:

$$\{r(t)\} = \{r_0\} \cdot \sin \omega t \quad (12.36)$$

dvojím derivováním dle času a zpětným dosazením:

$$\begin{aligned} -[M]\{r\}\omega^2 \sin \omega t + [K]\{r\}\sin \omega t &= \{0\} \\ (-\omega^2[M] + [K])\{r\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (12.37)$$

převědeme soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu na problém vlastních čísel pro matice K a M . netriviální řešení této rovnice nalezneme splněním podmínky řešitelnosti soustavy rovnic ve tvaru:

$$\det(-\omega^2 [M] + [K]) = 0 \quad (12.38)$$

Nejčastěji je tato úloha řešena některou z iteračních metod, pro ilustraci uvedeme Stodolovu iterační metodu, metodu inverzní iterace a metodu iterace podprostoru.

12.7.1 Stodolova iterační metoda

vy násobme rovnicí 12.37 zleva maticí poddajnosti $[\delta]$:

$$\begin{aligned} ([\delta][K] - [\delta]\omega_{(j)}^2[m])\{r_{(j)}\} &= \{0\} \\ (\omega^2[\delta][m] - [E])\{r_{(j)}\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (12.39)$$

neboť platí: $[\delta][K] = [E]$, tedy součin matice poddajnosti a matice tuhosti je jednotková matice. Tímto jednoduchým postupem jsme získali základní vztah metody konstant poddajnosti, která je analogickou úlohou k metodě konstant tuhosti. Metodou konstant poddajnosti se dále nebudeme zabývat, vynásobme pouze tuto rovnici nyní členem $1/\omega^2$:

$$\left([\delta][m] - \frac{1}{\omega_{(j)}^2}[E] \right) \{r_{(j)}\} = \{0\}$$

tuto rovnici je nyní již snadné upravit na tvar vhodný k iterování:

$$\frac{1}{\omega_{(j)}^2} \{r_{(j)}\} = [\delta][m] \{r_{(j)}\}$$

aproximaci vlastního tvaru pomocí tvaru předchozího můžeme tedy zapsat pomocí:

$$\{r_{(j)}\}^{i+1} = \omega_{(j)}^2 [\delta][m] \{r_{(j)}\}^i$$

Toto je základní výraz pro Stodolovu iterační metodu, jejíž postup si stručně uvedeme v následujících krocích:

1. volba počátečního tvaru kmitání $\{r_{(j)}\}^0$ - tento tvar lze zvolit libovolný (pozor však na to, že jednotlivé členy nesmí být navzájem lineárně závislé, např. tvar $\{1, 0, 0, \dots, 0\}^T$ je vhodný. Častěji se však používá tvar vypočítaný jako deformace od vlastní tíhy konstrukce.

2. výpočet normovaného tvaru:

$$\{r_{(j)}\}^0 = \frac{\{r_{(j)}\}^0}{\left(\{r_{(j)}\}^0 \right)^T [m] \{r_{(j)}\}^0}$$

3. Gramm-Schmidtova ortogonalizace: všechny vlastní tvary kmitání musí být vzájemně ortogonální, proto je potřeba zajistit, aby byl např. třetí vlastní tvar kolmý k

prvnímu a druhému vlastnímu tvaru. Tento krok je samozřejmě vynechán při výpočtu prvního vlastního tvaru (není zatím k čemu ortogonalizovat). Tak tedy např. při výpočtu třetího vlastního tvaru musí být splněny tyto podmínky ortogonality:

$$\begin{aligned} \left(\{r_{(1)}\}^0\right)^T [m] \{r_{(3)}\}^0 &= \{0\} \\ \left(\{r_{(2)}\}^0\right)^T [m] \{r_{(3)}\}^0 &= \{0\} \end{aligned}$$

při výpočtu třetího vlastního tvaru je tedy potřeba vyloučit první a druhý tvar pomocí podmínek ortogonality. Toto lze zapsat pomocí:

$$[m] \{r_{(j)}\}^0 = [m] \{r_{(j)}\}^0 - \sum_{k=1}^{j-1} C_{(k)} [m] \{r_{(k)}\}^0$$

kde

$$C_{(k)} = \left(\{r_{(j)}\}^0\right)^T [m] \{r_{(k)}\}^0$$

4. výpočet vlastní kruhové frekvence příslušné vlastnímu tvaru:

$$\omega_{i+1}^2 = \frac{\left(\{r_{(j)}\}^{i+1}\right)^T [m] \{r_{(j)}\}^i}{\left(\{r_{(j)}\}^{i+1}\right)^T [m] \{r_{(j)}\}^{i+1}}$$

5. zastavovací podmínka:

$$\frac{\left| \left(\omega_{(j)}^{i+1}\right)^2 - \left(\omega_{(j)}^i\right)^2 \right|}{\omega_{(j)}^{2i+1}} \leq 10^{-2s}$$

kde s je počet desetinných míst potřebných pro danou přesnost.

12.7.2 Inverzní iterace

Metoda inverzní iterace je založená na Stodolově iterační metodě. Opět volíme počáteční aproximaci vlastního tvaru, kterou označíme $\{r\}^0$. Vyjdeme ze vztahu:

$$[K] \{r\} = \omega^2 [M] \{r\} \quad (12.40)$$

Tento vztah platí pro libovolný vlastní tvar $\{r_i\}$ a jemu příslušnou vlastní frekvenci ω_i . Nyní vypočteme amplitudu setrvačných sil $\{F_{setrv}\}$

12.7.3 Metoda iterace podprostoru

Kapitola 13

Řešení úloh nelineární mechaniky

Dosud jsme předpokládali *lineární elastický izotropní materiál* v němž při zatížení vznikají pouze *malé deformace*. Tato představa o materiálu je však značně vzdálena tomu, jak se reálný materiál skutečně při zatěžování chová. Platnost Hookova zákona je u většiny reálných materiálů omezena pouze na malé deformace.

...

Nelineární problémy je možno rozdělit do tří skupin a to:

- materiálová (fyzikální) nelinearita
- geometrická nelinearita
- nelinearita způsobená změnou stavu (kontaktní úloha)

Materiálová nelinearita spočívá v nelineárních konstitutivních vztazích. Napětí není přímo úměrné deformaci. Při geometrické nelinearitě nemůžeme deformace považovat za nekonečně malé. Kategorie geometrických nelinearit zahrnuje velká posunutí a velké deformace.

13.1 Přístupy k řešení nelineárních problémů

Budeme se pouze zabývat těmi nejběžnějšími způsoby řešení nelineárních problémů, tudíž si budeme moci dovolit zvolit jeden ze tří výše uvedených typů nelinearit a vyložit problematiku pouze pomocí tohoto jednoho případu, např. pomocí materiálové nelinearity. Materiálovou nelinearitu je nejspíš nejjednodušší si představit graficky. Pouze naznačíme jakým způsobem se popsané metody dají rozšířit na další dvě kategorie, zejména pak na geometrickou nelinearitu.

Řešení nelineárních úloh pomocí metody konečných prvků je většinou prováděno pomocí tří základních technik:

- inkrementální (postupné) - INCREMENTAL OR STEPWISE METHODS
- iterační (Newtonovy) - ITERATIVE OR NEWTON METHODS

- smíšené - STEP-ITERATIVE OR MIXED PROCEDURES

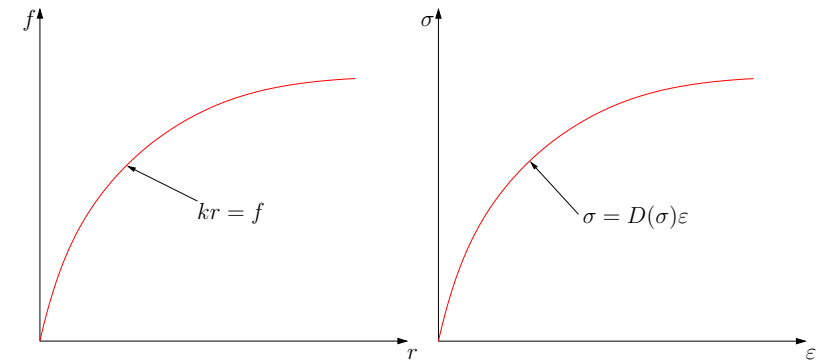
V případě materiálové nelinearity budou mít podmínky rovnováhy pro element tvar:

$$[k][r] = \{f\} \quad (13.1)$$

V této rovnici však matice tuhosti elementu $[k]$ je však funkcí nelineárních materiálových vlastností $[D(\sigma)]$. Toto můžeme zapsat symbolicky ve tvaru:

$$[k] = [k(\{r\}, \{f\})] \quad (13.2)$$

Toto je schematicky znázorněno na obr. 13.1.



Obrázek 13.1: Materiálová nelinearita (a) zatížení vs. posunutí (b) napětí vs. deformace

13.2 Inkrementální technika

Základem inkrementálního postupu je rozdělení zatížení na několik malých kroků. Často jsou tyto kroky voleny o stejné velikosti, ale obecně nemusí být. Přírůstek zatížení je aplikován v každém kroku a výpočet v každém kroku spočívá v řešení soustavy *lineárních* rovnic. Jinými slovy, matice tuhosti $[K]$ je stejná v každém zatěžovacím kroku, ale liší se mezi jednotlivými kroky. Výpočet každého kroku je založen na přírůstu posunutí $\{r\}$, tento inkrementální postup je opakován až do okamžiku dosažení celkového zatížení. Dá se také říci, že inkrementální postup převádí nelineární úlohu na *úlohu po částech lineární*.

Chceme-li popsat inkrementální techniku, uvažujme celkové zatížení dané vektorem $\{F\}$. Počáteční (referenční) stav je dán vektorem počátečních sil $\{F_0\}$ a vektorem počátečních posunutí $\{r_0\}$. Nejčastěji tyto vektory budou oba nulové, v případě, že začínáme z nezatíženého, nedeformovaného stavu. Rozdělíme celkové zatížení na N přírůstků, t.j. celkové zatížení aplikované na konstrukci bude:

$$\{F\} = \{F_0\} + \sum_{j=1}^N \{\Delta F_j\} \quad (13.3)$$

Po i -tém přírůstku je zatížení dáno vektorem:

$$\{F_i\} = \{F_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta F_j\} \quad (13.4)$$

a vektor posunutí:

$$\{r_i\} = \{r_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta r_j\} \quad (13.5)$$

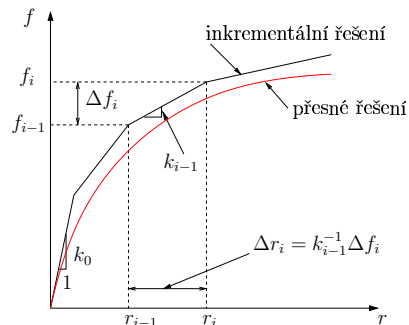
Abychom mohli spočítat přírůstek posunutí (posunutím je řízen celý výpočet), použijeme výpočet matice tuhosti na základě předešlého přírůstku:

$$[k_{i-1}]\{\Delta r_i\} = \{\Delta F_i\} \text{ pro } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (13.6)$$

kde

$$[k_{i-1}] = [k_{i-1}(\{r_{i-1}\}, \{F_{i-1}\})] \quad (13.7)$$

Počáteční hodnota matice tuhosti $[k_0]$ se vypočte z materiálových konstant na základě pracovního diagramu na začátku zatížení. Schema inkrementálního postupu je znázorněno na obr. 13.2.



Obrázek 13.2: Inkrementální přístup

Obyčejně se v inkrementálním přístupu využívá *tečného modulu pružnosti* k výpočtu $[D(\sigma)]$ a k výpočtu matice tuhosti $[K]$. Tato matice tuhosti se pak nazývá *tečná matice tuhosti*.

Inkrementální metoda je analogická s numerickými metodami používanými k integraci soustav lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic, jako je *Eulerova metoda*, nebo metoda *Runge-Kutta*. Ke zpřesnění výše uvedené metody se nejčastěji používá zjemnění dělení (rozdělení zatížení na více přírůstků). Musíme si ovšem uvědomit, že tečná matice tuhosti musí být přepočítána v každém kroku, to znamená velké nároky na výpočetní čas.

13.3 Iterační (Newtonovy) techniky

Při iteračních metodách, na rozdíl od inkrementální techniky, je v každém kroku aplikováno *celkové zatížení*. Protože v každém kroku používáme přibližnou hodnotu matice tuhosti v každém kroku, není dosaženo rovnováhy a po každém kroku musí dojít k vyrovnání. Toho je dosaženo tím, že po každé iteraci je vypočítán tzv. *vektor nevyrovnaného zatížení* a v dalším kroku je využit k výpočtu přírůstku posunutí. Tento postup je opakován do té doby, než je dosaženo rovnováhy s požadovanou přesností.

Označme opět $\{F_0\}$ vektor počátečního zatížení a $\{r_0\}$ vektor počátečních posunutí. V obecném případě tyto nebudou vždy nulové. Po i -tém cyklu iteračního procesu bude zatížení:

$$\{F_i\} = \{F\} - \{F_{e,i-1}\} \quad (13.8)$$

kde $\{F\}$ je celkové zatížení a $\{F_{e,i-1}\}$ je zatížení vyrovnané po předchozím kroku. Přírůstek posunutí je během i -tého kroku spočítán pomocí:

$$[k^{(i)}]\{\Delta r_i\} = \{F_i\} \quad (13.9)$$

Celkové posunutí po i -tém kroku je vypočítáno z:

$$\{r_i\} = \{r_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta r_j\} \quad (13.10)$$

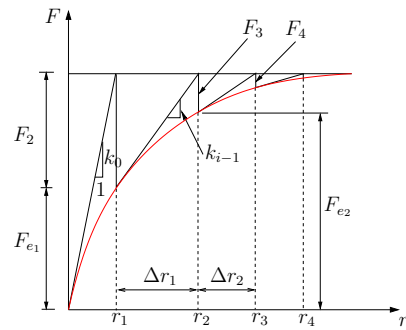
Na konci i -tého iteračního kroku je vypočítán *vektor nevyrovnaných sil* $\{F_{e,i}\}$ jako zatížení nezbytné k zachování posunutí $\{r_i\}$. Tato procedura je opakována do té doby, než přírůstky posunutí nebo nevyrovnané síly jsou nulové, respektive menší než daná limitní hodnota.

V každém iteračním kroku je třeba vypočítat matici tuhosti. Nejběžnějším způsobem je počítat *tečnou matici tuhosti* na koci předchozího iteračního kroku, t.j. jako tečnu k zatěžovací křivce $\{F\} - \{r\}$ v bodě $\{r_{i-1}\}, \{F_{i-1}\}$.

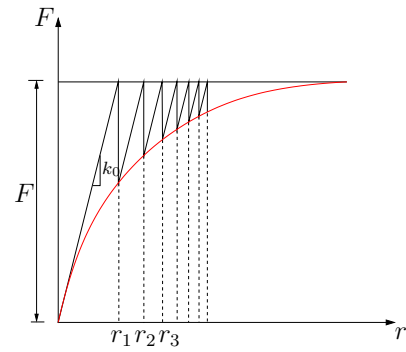
Tento postup znamená vyčíslení tečné matice tuhosti v každém iteračním kroku, což může být značně časově náročné a proto se často používá *modifikovaná iterační technika*, která nepřepočítává v každém kroku matici tuhosti, nýbrž po celou dobu iterace počítá s počáteční tečnou maticí tuhosti. Rozdíl mezi klasickou a modifikovanou iterační technikou je patrný z obr. 13.3.

13.4 Smíšené techniky (STEP-ITERATIVE OR MIXED)

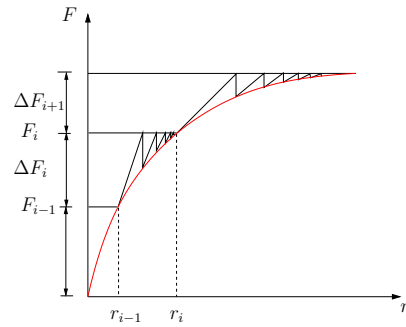
Tyto techniky využívají kombinace inkrementálního a iteračního postupu. Jeden z možných přístupů je patrný z obr. 13.5 kde zpřesnění výpočtu je dosaženo v každém přírůstku provedením několika modifikovaných iteračních kroků, t.j. bez přepočítávání tečné matice tuhosti.



Obrázek 13.3: Iterační metoda



Obrázek 13.4: Modifikovaná iterační metoda



Obrázek 13.5: Smíšená (mixed) technika

Kapitola 14

Numerická integrace

Pro výpočet matice tuhosti jakéhokoliv prvku je třeba provést numerickou integraci součinu matic. Integrál matice je roven matici integrálů jednotlivých prvků dané matice. Numerickou integraci budeme cílit na interval $\langle -1; +1 \rangle$, pouze zřídka výsledek zobecníme pro interval $\langle a; b \rangle$. Připomeňme, že matice tuhosti prvku se dá zapsat pomocí $\int_{\Omega} B^T DB d\Omega$, nám však vzhledem k výše uvedenému postačí se omezit na integrál obecné funkce $f(\xi)$, $f(\xi, \eta)$, popř. $f(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (14.1)$$

Funkci $f(\xi)$ nahradíme na intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ polynomem, který označíme $F(\xi)$. Aproximaci funkce $f(\xi)$ stanovíme tak, že ve vybraných bodech ξ_i z intervalu $\langle -1; +1 \rangle$ bude platit $f(\xi_i) = F(\xi_i)$, t.j. polynomičká funkce bude těmito body procházet a hledaný integrál $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ určíme jako $\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi$. Přesnost takto vypočteného integrálu se bude zvyšovat s počtem zvolených bodů na daném intervalu.

K aproximaci funkce $f(\xi)$ se často používají Lagrangeovy polynomy. Zvolme na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ $(n+1)$ bodů, kterými můžeme proložit polynom n -tého stupně. Pro libovolný stupeň bude mít Lagrangeův polynom následující tvar:

$$h_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_0)(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (14.2)$$

Aproximační funkci $F(\xi)$ lze vyjádřit pomocí:

$$F(\xi) = f_0 h_0(\xi) + f_1 h_1(\xi) + \dots + f_n h_n(\xi) \quad (14.3)$$

Dle způsobu dělení intervalu si rozdělíme a detailněji popíšeme dva možné způsoby numerické integrace. První přístup rozděljuje daný interval na n stejně velkých podintervalů, zatímco druhý způsob se snaží o racionálnější umístění integračních bodů, tedy jedná se o nerovnoměrné dělení intervalu.

14.1 Rovnoměrné dělení (Newton-Cotesovo schéma)

Rozdělme tedy nejprve daný interval rovnoměrně, t.j. pro jednotlivé body ξ_i na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ bude platit:

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = -1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = -1 + \frac{4}{n}, \dots, \xi_{n-1} = -1 + \frac{2(n-1)}{n}, \xi_n = 1$$

Přesná hodnota integrálu $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ potom bude:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n f_i \int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi + R_n \quad (14.4)$$

Výraz $\int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi$ lze vyčíslit pro jednotlivé stupně Lagrangeových mnohočlenů a tyto výrazy se potom nazývají Newton-Cotesovými konstantami C_i^n . Vzorec 14.4 lze potom přepsat ve tvaru:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n f_i C_i^n + R_n \quad (14.5)$$

Výhodou Newton-Cotesova schématu je fakt, že jej lze snadno zobecnit pro libovolný interval $\langle a; b \rangle$. Výraz pro přibližnou (tedy beze zbytku) hodnotu integrálu $\int_a^b f(x) dx$ bude mít tvar:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n f_i C_i^n \quad (14.6)$$

14.2 Nerovnoměrné dělení (Gaussova integrační formule)

Nyní se pokusme o následující úvahu. Daný interval $\langle -1, 1 \rangle$ nebudeme dělit rovnoměrně, ale integrační body (body aproximace dané funkce) se budeme snažit volit tak, aby výsledná přibližná hodnota integrálu byla co nejbližší jeho přesné hodnotě. Nyní tedy nebudou neznámými pouze váhové koeficienty v aproximačním předpisu, ale i body na daném intervalu. V tomto případě však pro vyjádření daného integrálu potřebujeme dvojnásobný počet parametrů. Daný integrál zapíšeme tedy jako následující součet:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \dots + \alpha_n f(\xi_n) \quad (14.7)$$

kde α_i jsou tedy váhové koeficienty a ξ_i jsou body na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Důležité je si uvědomit, že *obojí* jsou nyní *neznámé*. V předchozím odstavci jsme aproximovali hledanou funkci polynomem $(n-1)$ stupně. Nyní máme však k dispozici dvojnásobný počet parametrů, aproximační funkce $F(\xi)$ může tedy být až polynom $(2n-1)$ stupně. Hledáme tedy další aproximační funkci, která zvýší stupeň aproximačního polynomu, ale zároveň zůstane nulovou ve všech n bodech, kterými procházejí naše Lagrangeovy polynomy. Nejsnadnější je rozšířit funkci $(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n)$ obecným polynomem n -tého stupně:

$$F(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n)(A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots + A_n \xi^n) \quad (14.8)$$

Hledáme tedy aproximaci funkce $f(\xi)$ ve tvaru:

$$f(\xi) \approx F(\xi) = \underbrace{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n)}_{p(\xi)} \sum_{i=0}^n A_i \xi^i \quad (14.9)$$

Integrujme:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n A_i \int_{-1}^1 p(\xi) \xi^{i-1} d\xi \quad (14.10)$$

Budeme se nyní snažit vybrat souřadnice ξ_i tak, aby se všech n integrálů $\int_{-1}^1 p(\xi)\xi^{i-1} d\xi$ rovnalo 0. Tyto podmínky vedou na soustavu nelineárních rovnic:

$$\int_{-1}^1 p(\xi)\xi^{i-1} d\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14.11)$$

Tuto vlastnost mají tzv. Legendrovy polynomy a ξ_i jsou tedy kořeny Legendrových polynomů. Budeme-li tedy znát tyto kořeny ξ_i , lze váhové koeficienty α_i spočítat snadno pomocí:

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi \quad (14.12)$$

Ukažme si výpočet kořenů i váhových koeficientů pro pár prvních dělení intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Pro případ jediného integračního bodu uprostřed intervalu (pro sudý počet dílků bude vždy jeden integrační bod uprostřed intervalu, tedy v nule). Spočítejme tedy $h_1(\xi)$ a α_1 :

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= 1 \\ \alpha_1 &= \int_{-1}^1 1 d\xi = 2 \end{aligned}$$

Nyní hledíme Gaussovy integrační doby pro případ dělení na dva intervaly. V tomto případě využijeme symetrie $\xi_1 = -\xi_2$ a řešíme soustavu nelineárních rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi d\xi &= 0 \end{aligned}$$

Druhá podmínka je díky symetrii intervalu identicky splněna. Řešíme tedy první podmínku a dosadíme podmínku symetrie:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= \int_{-1}^1 (\xi + \xi_2)(\xi - \xi_2) d\xi = \int_{-1}^1 (\xi^2 - \xi_2^2) d\xi = \\ &= \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 - \xi_2^2 [\xi]_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \xi_2^2 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

Z této podmínky plyne, že:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \xi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Váhové koeficienty $\alpha_1 = \alpha_2$ získáme již snadno integrací:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \int_{-1}^1 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} d\xi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} d\xi = 1$$

Pro případ dělení intervalu na tři díly si uvedme již jen podmínky, ze kterých určíme potřebné váhové koeficienty i body na intervalu:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^2 d\xi &= 0 \end{aligned}$$

První i třetí podmínka jsou opět splněny identicky a integrací druhé získáme následující podmínku pro ξ_3 :

$$\int_{-1}^1 (\xi^2 - \xi_3^2)\xi^2 d\xi = \left[\frac{\xi^5}{5} - \xi_3^2 \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\xi_3^2 = 0$$

Z tohoto plyne, že $\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Váhové koeficienty opět získáme integrací následujícího:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} d\xi = \frac{5}{9} \\ \alpha_2 &= \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} d\xi = \frac{8}{9} \end{aligned}$$