Poznámky ke cvičení z předmětu Pružnost pevnost na K618 FD ČVUT v Praze (pracovní verze). Tento materiál má pouze pracovní charakter a bude v průběhu semestru postupně doplňován.

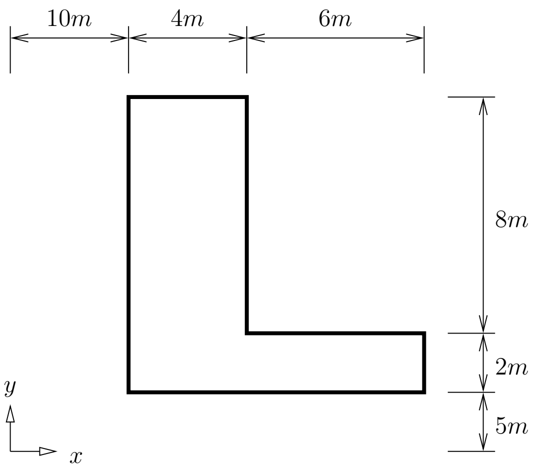
Autor: Jan Vyčichl E–mail: vycichl@fd.cvut.cz

revize: 16. října 2012

1 Příklad

Zadání

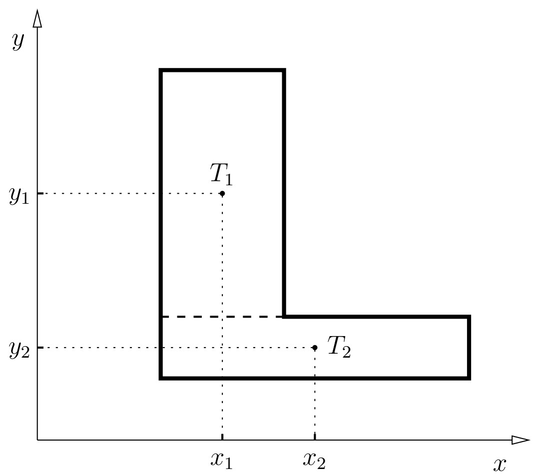
Pomocí statických momentů setrvačnosti stanovte těžiště zadané plochy (rozměry jsou zadány v metrech).



Pozn.: Příklad bude řešen ve dvou variantách. Obě samozřejmě musí vést ke stejným hodnotám výsledku. Způsobů, jak rozložit zadanou plochu, je samozřejmě více (nekonečně mnoho).

Varianta 1.

Obrazec rozložíme na základní tvary (tabulka momentů setrvačnosti – Statika). Plochu rozložíme na dva menší obdélníky. Součet těchto dvou obdélníků nám vytvoří zadanou plochu.



Určíme souřadnice těžišť obou obdélníků k zadanému souřadnicovému systému.

$$T_1 \quad [12; 11]$$
$$T_2 \quad [15; 6]$$

Pro přehledný dopočet statických momentů setrvačnosti použijeme tabulku (výhodnost tabulky řešitel ocení při komplikovanějším tvaru zadané plochy). Statický moment setrvačnosti k x a y vypočítáme podle vztahu

$$S_{xi} = A_i \cdot y_i$$
$$S_{yi} = A_i \cdot x_i$$

Všimněte si, že statický moment setrvačnosti k ose x je plocha A krát souřadnice y těžiště plochy. A naopak, statický moment setrvačnosti k ose y je plocha A krát souřadnice x těžiště plochy.

i	zn.	A_i	x_i	y_i	S_{yi}	S_{xi}
1	+	32	12	11	384	352
2	+	20	15	6	300	120
Součet		52			684	472

Celková plocha a celkový statický moment k ose x a y je

$$A = 52\,\mathrm{m}^2$$
$$S_x = 472\,\mathrm{m}^3$$
$$S_y = 684\,\mathrm{m}^3$$

Souřadnice těžiště zadané plochy pak jsou

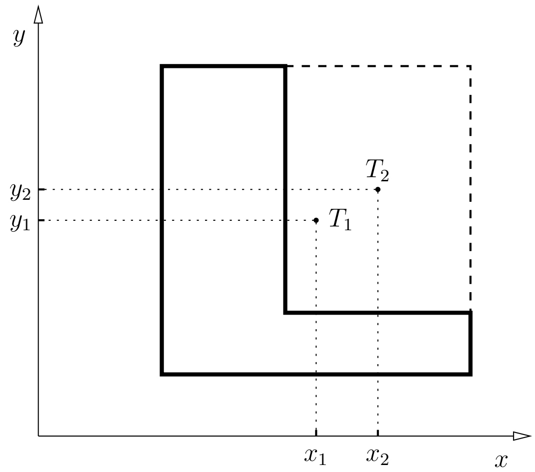
$$x = \frac{S_y}{A} = 13,15\,\mathrm{m}$$
$$y = \frac{S_x}{A} = 9,08\,\mathrm{m}$$

Těžiště zadané plochy je

$$T[13,15; 9,08]$$

Varianta 2.

Obrazec rozložíme na zakladní tvary (tabulka momentů setrvačnosti – Statika). Plochu vytvoříme tak, že od velkého obdélníku, který definuje celkový rozměr zadané plochy, odečteme menší obdélník. Rozdíl těchto dvou obdélníků nám tedy vytvoří zadanou plochu.



Určíme souřadnice těžišť obou obdélníků k zadanému souřadnicovému systému.

$$T_1 \quad [15; 10]$$
$$T_2 \quad [17; 11]$$

Tabulka statických momentů setrvačnosti. Všimněte si, že v řádku 2 je znaménko mínus, které nám napovídá, že v celkovém součtu tento řádek odečítáme.

i	zn.	A_i	x_i	y_i	S_{yi}	S_{xi}
1	+	100	15	10	1500	1000
2	-	48	17	11	816	528
Součet		52			684	472

Celková plocha a celkový statický moment k ose x a y je

$$\begin{aligned} A &= 52\,\mathrm{m}^2 \\ S_x &= 472\,\mathrm{m}^3 \\ S_y &= 684\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště zadané plochy pak jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{S_y}{A} = 13,15\,\mathrm{m} \\ y &= \frac{S_x}{A} = 9,08\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

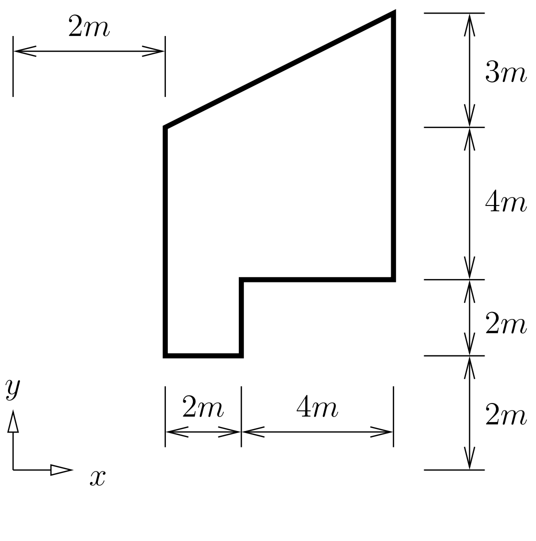
Těžiště zadané plochy je

$$T[13,15; 9,08]$$

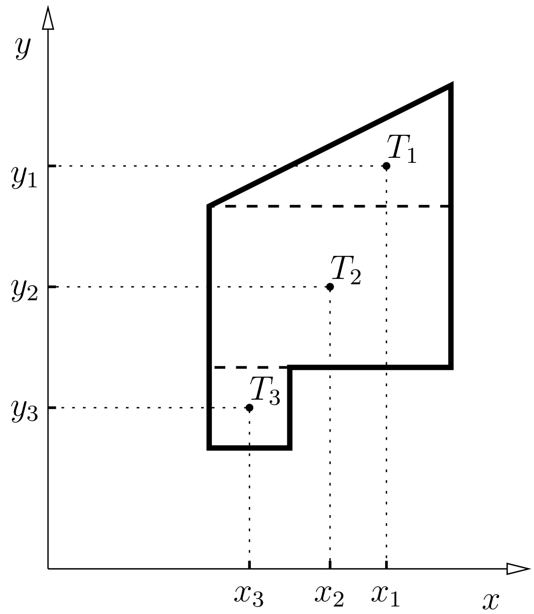
2 Příklad

Zadání

Pomocí statických momentů setrvačnosti stanovte těžiště zadané plochy (rozměry jsou zadány v metrech).



Obrazec rozložíme na základní tvary (tabulka momentů setrvačnosti – Statika). Plochu rozložíme na trojúhelník, obdélník a čtverec. Součet těchto ploch vytvoří zadanou plochu.



Určíme souřadnice těžišť všech tří ploch k zadanému souřadnicovému systému.

$$\begin{aligned} &T_1 \quad [6; 9] \\ &T_2 \quad [5; 6] \\ &T_3 \quad [3; 3] \end{aligned}$$

Tabulka statických momentů setrvačnosti.

i	zn.	A_i	x_i	y_i	S_{yi}	S_{xi}
1	+	9	6	9	54	81
2	+	24	5	6	120	144
3	+	4	3	3	12	12
Součet		37			186	237

Celková plocha a celkový statický moment k ose x a y je

$$\begin{aligned} A &= 37\,\mathrm{m}^2 \\ S_x &= 237\,\mathrm{m}^3 \\ S_y &= 186\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště zadané plochy pak jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{S_y}{A} = 5,03\,\mathrm{m} \\ y &= \frac{S_x}{A} = 6,41\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Těžiště zadané plochy je

$$T[5,03; 6,41]$$

3 Doporučení

Jednotky

Tlak, Napětí → Pascal

$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{1}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$$

Doporučuji se držet zavedené konvence

$$\mathrm{Pa} \leftrightarrows \mathrm{m,\ kg,\ N}$$

nebo

$$\mathrm{MPa} \leftrightarrows \mathrm{mm,\ kg,\ N}$$

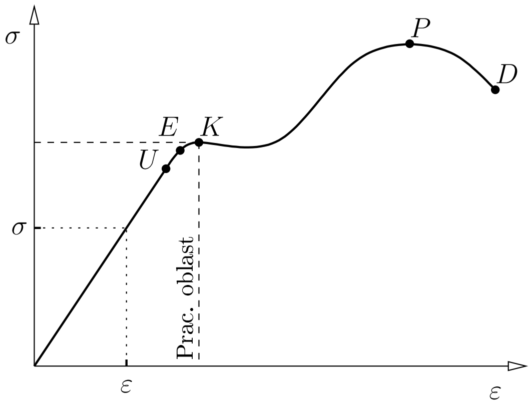
4 Příklad

Zadání

Zkontrolujte taženou ocelovou tyč obdelníkového průřezu $b = 20\,\mathrm{mm}$ $h = 10\,\mathrm{mm}$,je–li dáno tahové zatížení $F = 2 \cdot 10^4\,\mathrm{N}$, dovolené napětí oceli $\sigma_D = 120\,\mathrm{MPa}$ a mez kluzu oceli $\sigma_K = 250\,\mathrm{MPa}$ (nebo–li mez průtažnosti – mezní stav pro posuzování materiálu). *Pozn.: Tato úloha se také označuje jako "Posouzení nosníku na tah–tlak".*

Pracovní diagram

Pracovní diagram oceli



U – mez úměrnosti
E – mez pružnosti
K – mez kluzu
P – mez pevnosti
D – destrukce

Hookův zákon

Vztah mezi smluvním napětím σ [Pa], modulem pružnosti E [Pa] a poměrným prodloužením ε [1] materiálu.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Smluvní napětí

Smluvní napětí σ $[Pa]$ je rovno podílu normálové síly F [N] a průřezové plochy A [m^2].

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Poměrné prodloužení

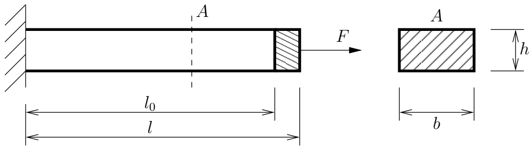
Poměrné prodloužení ε [1] je rovno poměru přírůstku prodloužení u [m] ku původní délce l_0 [m].

$$\varepsilon = \frac{u}{l_0}$$

Pozn.: Přírůstek prodloužení u [m] vypočteme ze vztahu $u = l - l_0$, kde l [m] je aktuální délka a l_0. [m] je délka původní.

Řešení

Náčrtek upevnění tažené ocelové tyče



Výpočet provozního napětí σ_F od F [N] na A, kde $A = b \cdot h$ [mm^2] (napětí v materiálu způsobené tahovou silou).

$$\sigma_F = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot h} = \frac{2 \cdot 10^4}{20 \cdot 10} = 100\,\mathrm{MPa}$$

Kontrola pevnostní podmínky – vzájemné porovnání provozního napětí tyče σ_F a dovolené napětí oceli σ_D.

$$\begin{aligned} \sigma_F &< \sigma_D \\ 100\,\mathrm{MPa} &< 120\,\mathrm{MPa} \Rightarrow \text{Vyhovuje} \end{aligned}$$

Výpočet koeficientu bezpečnosti k [1]

$$k = \frac{\sigma_K}{\sigma_F} = \frac{250}{100} = 2,5$$

Využitelnost materiálu v [1]

$$v = \frac{1}{k} = \frac{1}{2,5} = 0,4 \rightarrow 40\%$$

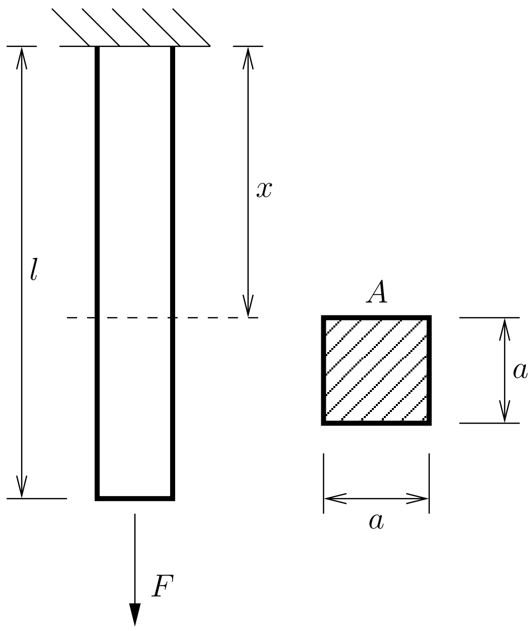
5 Příklad

Zadání

Zjistěte vlastnosti tahem namáhaného ocelového nosníku čtvercového průřezu, který je uložený dle obrázku. Zadáno je $a = 10\,\mathrm{mm}$, $l = 1\,\mathrm{m}$, $E = 2,1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$ a $\sigma = 120\,\mathrm{MPa}$. Určete obecně vnitřní síly v nosníku, normálové napětí $\sigma(x)$ a poměrné prodloužení $\varepsilon(x)$ v obecné vzdálenosti x a funkci prodloužení $u(x)$. Dále zjistěte maximální dovolenou sílu F_D, maximální deformaci u_{max} pro sílu F_D a tuhost k_F a poddajnost δ_F konstrukce. Graficky znázorněte všechny vámi určené průběhy.

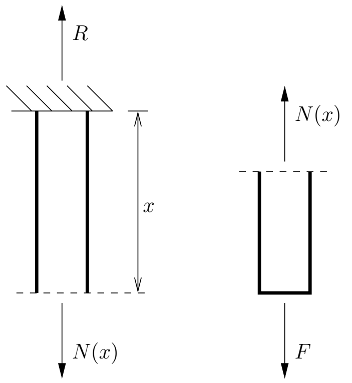
Řešení

Náčrtek upevnění taženého nosníku



Stanovení vnitřních sil

Jedná se o prostý tah–tlak, takže v nosníku vzniká pouze normálová síla N. Funkce posouvací síly $T(x)$ a momentu $M(x)$ jsou rovny nule. Pro určení funkce průběhu normálové síly $N(x)$ lze použít "Metodu řezu" (když je celek v rovnováze, pak každá jeho část je také v rovnováze). Tuto metodu je vhodné použít ve směru od volného konce (vyhneme se tím nutnosti výpočtu reakce ve vetknutí R).



Ze svislé podmínky rovnováhy zjistíme průběh normálové síly $N(x)$.

$$\begin{aligned} \uparrow y: \; +N(x) - F &= 0 \\ N(x) &= F \end{aligned}$$

Napětí a poměrné prodloužení

Průběh normálového napětí určíme ze základních vztahů a poměrné prodloužení z Hookova zákona.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F}{a^2}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{F}{E \cdot a^2}$$

Prodloužení

Funkci prodloužení získáme součtem všech dílčích poměrných prodloužení přes celou délku nosníku (integrál).

$$u(x) = \int \varepsilon(x) dx = \frac{F}{E \cdot a^2} \cdot x + C$$

Z okrajových podmínek pro vetknutí nosníku ($x = 0$) určíme integrační konstantu C.

$$u(0) = 0 \longrightarrow C = 0$$

Obecná funkce prodloužení (deformace).

$$u(x) = \frac{F}{E \cdot a^2} \cdot x$$

Celkové maximalní prodloužení (deformace).

$$u(l) = \frac{F}{E \cdot a^2} \cdot l$$

Ostatní

Určení maximální dovolené tahové síly provedeme z podmínky.

$$\sigma_{max} = \sigma = \frac{F}{a^2} \leq \sigma_D$$

$$F_D \leq \sigma_D \cdot a^2 = 120 \cdot 10^2 = 12 \cdot 10^3 \, \mathrm{N}$$

Maximální deformace odpovídá maximálnímu dovolenému zatížení, tedy síle F_D.

$$u_{max} = u(l) = \frac{F_D \cdot l}{E \cdot a^2} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{10^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 0,57 \, \mathrm{mm}$$

Tuhost konstrukce pro maximalní dovolenou sílu F_D určíme z výrazu.

$$F = k_F \cdot u_F \rightarrow k_F = \frac{F}{u_F} = \frac{F_D}{u_{max}} = 2,1 \cdot 10^4 \, \mathrm{N/mm}$$

Poddajnost konstrukce pro maximalní dovolenou sílu F_D určíme z výrazu.

$$\delta_F = \frac{1}{k_F} \rightarrow \delta_k = 4,76 \cdot 10^{-5} \, \mathrm{mm/N}$$

Grafické znázornění průběhu normálové síly $N(x)$, funkce normálového napětí $\sigma(x)$, funkce poměrného prodloužení $\varepsilon(x)$ a funkce prodloužení $u(x)$.