Poznámky ke cvičení z předmětu Pružnost pevnost na K618 FD ČVUT v Praze (pracovní verze). Tento materiál má pouze pracovní charakter a bude v průbehu semestru postupně doplňován.

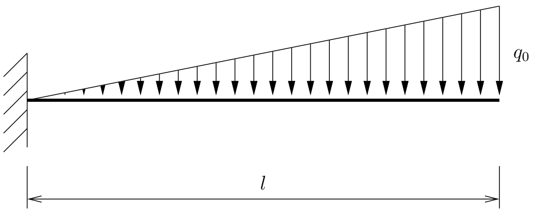
Autor: Jan Vyčichl E–mail: vycichl@fd.cvut.cz

revize: 22. listopadu 2011

1 Příklad

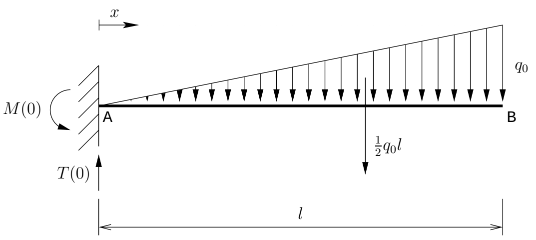
Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete funkci momentu a ohybové čáry a stanovte posunutí a pootočení na konci nosníku. Vyřešte pomocí *B.D.R.*[1] a *Ú.D.R.*[2]
Znáte: q_0 , l. Určete: $M_o(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, $v(l)$, $\varphi(l)$



Reakce

Podstatné pro řešení úlohy je jen svislá posouvací reakce $T(0)$ a moment $M(0)$ v bodě `A`, kde $x = 0$ a výraz $\frac{1}{2}q_0 l$ je náhradní břemeno pro spojité trojúhelníkové zatížení.



$T(0)$ – síla – ↑ silová podmínka

$$T(0) = \frac{1}{2}q_0 l$$

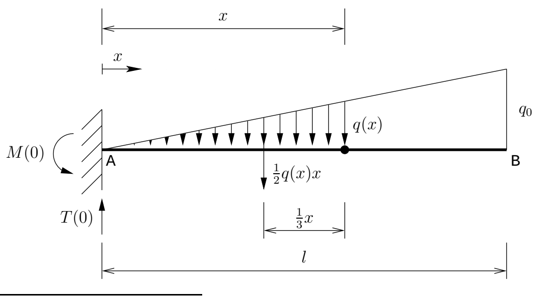
$M(0)$ – moment – momentová podmínka k bodu `A`

$$M(0) = \frac{1}{2}q_0 l \frac{2}{3}l = \frac{1}{3}q_0 l^2$$

Rozbor zatížení

Odvození velikosti trojúhelníkového spojitého zatížení pro obecnou vzdálenost x od bodu `A` z podobnosti trojúhelníku

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{l} \Longrightarrow q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$



Průběh momentů

Sečteme všechny momenty zleva (kladné směry ← ↑ ↻) k vyšetřovanému bodu ve vzdálenosti x.

$$\begin{aligned}
M_o(x) &= -M(0) + T(0)x - \frac{1}{2}xq(x)\frac{1}{3}x \\
M_o(x) &= -\frac{1}{3}q_0 l^2 + \frac{1}{2}q_0 l x - \frac{1}{6}q_0 \frac{x}{l}x^2 \\
M_o(x) &= q_0\left[\frac{lx}{2} - \frac{l^2}{3} - \frac{x^3}{6l}\right]
\end{aligned}$$

Řešení pomocí B.D.R.

Postupnou integrací funkce $v''(x)$ dostaneme neúplnou funkci ohybové čáry $v(x)$

$$\begin{aligned}
v''(x) &= -\frac{M_o(x)}{EJ} = \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^3}{6l} + \frac{l^2}{3} - \frac{lx}{2}\right] \\
v'(x) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^4}{24l} + \frac{l^2 x}{3} - \frac{lx^2}{4}\right] + C_1 \\
v(x) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^5}{120l} + \frac{l^2x^2}{6} - \frac{lx^3}{12}\right] + C_1 x + C_2
\end{aligned}$$

Pomocí okrajových podmínek dopočítáme koeficienty C_1 a C_2, a doplníme funkci ohybové čáry $v(x)$

$$v(0) = 0 \quad \text{posunutí v bodě A} \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\varphi(0) = v'(0) = 0 \quad \text{pootočení v bodě A} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0$$

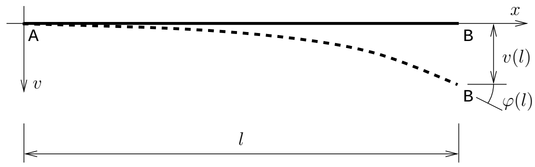
Funkce ohybové čáry a pootočení

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^5}{120l} + \frac{l^2x^2}{6} - \frac{lx^3}{12}\right] \\
\varphi(x) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^4}{24l} + \frac{l^2x}{3} - \frac{lx^2}{4}\right]
\end{aligned}$$

Posunutí a pootočení na konci nosníku v bodě `B`

$$\begin{aligned}
v(l) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{l^4}{120} + \frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12}\right] \\
v(l) &= \frac{11}{120}\frac{q_0 l^4}{EJ} \\
\varphi(l) &= v'(x) = \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{4}\right] \\
\varphi(l) &= \frac{1}{8}\frac{q_0 l^3}{EJ}
\end{aligned}$$

Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



[1] Bernoulliho diferenciální rovnice
[2] Úplné diferenciální rovnice

Řešení pomocí Ú.D.R.

Postupnou integrací funkce $v''''(x)$ dostaneme neúplnou funkci ohybové čáry $v(x)$

$$
\begin{aligned}
v''''(x) &= \frac{q(x)}{EJ} = \frac{q_0}{EJ}\frac{x}{l} \\
v'''(x) &= \frac{q_0}{EJ}\frac{x^2}{2l} + C_1 \\
v''(x) &= \frac{q_0}{EJ}\frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2 \\
v'(x) &= \frac{q_0}{EJ}\frac{x^4}{24l} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\
v(x) &= \frac{q_0}{EJ}\frac{x^5}{120l} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

Pomocí okrajových podmínek dopočítáme koeficienty C_1, C_2, C_3 a C_4, a doplníme funkci ohybové čáry $v(x)$

$$v(0) = 0 \quad \text{posunutí v bodě A} \quad \Longrightarrow \quad C_4 = 0$$

$$\varphi(0) = v'(0) = 0 \quad \text{pootočení v bodě A} \quad \Longrightarrow \quad C_3 = 0$$

$$T(l) = 0 \quad \text{součet posouvacích sil v bodě B}$$

$$v'''(l) = -\frac{T(l)}{EJ} = 0 \Longrightarrow \frac{q_0}{EJ}\frac{l}{2} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q_0}{EJ}\frac{l}{2}$$

$$M_o(l) = 0 \quad \text{součet momentů v bodě B}$$

$$v''(l) = -\frac{M_o(l)}{EJ} = 0 \Longrightarrow \frac{q_0}{EJ}\frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{q_0}{EJ}\frac{l^2}{3}$$

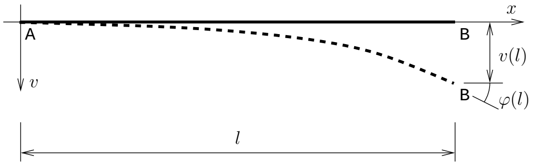
Funkce ohybové čáry

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{q_0}{EJ}\frac{x^5}{120l} - \frac{q_0}{EJ}\frac{l}{2}\frac{x^3}{6} + \frac{q_0}{EJ}\frac{l^2}{3}\frac{x^2}{2} \\
v(x) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{x^5}{120l} + \frac{l^2 x^2}{6} - \frac{l x^3}{12}\right]
\end{aligned}
$$

Posunutí a pootočení na konci nosníku v bodě B

$$
\begin{aligned}
v(l) &= \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{l^4}{120} + \frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12}\right] \\
v(l) &= \frac{11}{120}\frac{q_0 l^4}{EJ} \\
\varphi(l) &= v'(l) = \frac{q_0}{EJ}\left[\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{4}\right] \\
\varphi(l) &= \frac{1}{8}\frac{q_0 l^3}{EJ}
\end{aligned}
$$

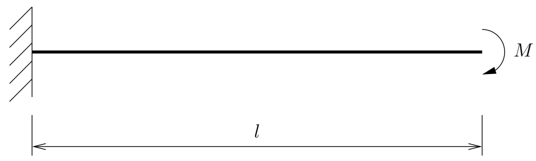
Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



2 Příklad

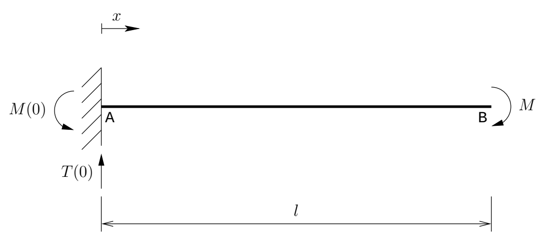
Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete funkci momentu a ohybové čáry a stanovte posunutí a pootočení na konci nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: M, l. Určete: $M_o(x)$, $T_f(x)$, $M_{of}(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, $v(l)$, $\varphi(l)$



Reakce

Podstatné pro řešení úlohy je jen svislá posouvací reakce $T(0)$ a moment $M(0)$ v bodě A, kde $x = 0$.



$T(0)$ – síla – ↑ silová podmínka

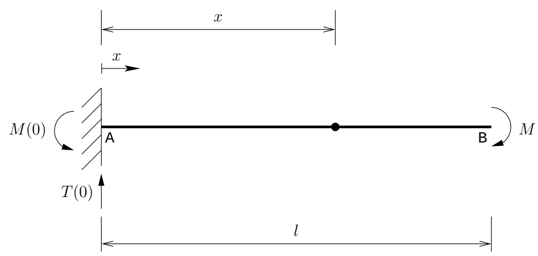
$$T(0) = 0$$

$M(0)$ – moment – momentová podmínka k bodu A

$$M(0) = M$$

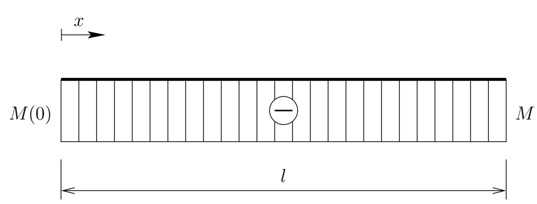
Průběh momentů

Sečteme všechny momenty zleva (kladné směry ← ↑ ↻) k vyšetřovanému bodu ve vzdálenosti x.



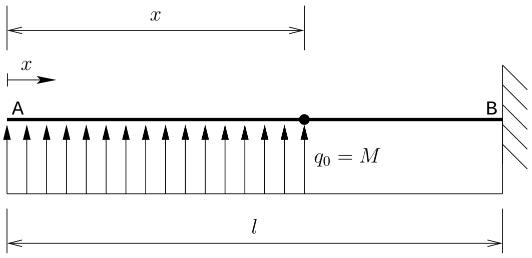
$$M_o(x) \quad = \quad -M(0) + T(0)x = -M$$

Výsledný průběh momentu



Fiktivní nosník

Z tabulek určíme fiktivní nosník a vytvoříme na něm spojité zatížení odpovídající tvarem a velikostí momentům skuečného nosníku $q_0 = M$. Určíme průběh posouvacích sil a momentů na fiktivním nosníku $T_f(x)$ a $M_{of}(x)$ (stejná znaménková konvence jako u T a M tedy $\leftarrow \uparrow \circlearrowleft$).



$$T_f(x) = q_0 x = Mx$$

$$M_{of}(x) = q_0 x \frac{x}{2} = M \frac{x^2}{2}$$

Hodnoty posouvací síly a momentu ve vetknutí fiktivního nosníku $T_f(l)$ a $M_{of}(l)$.

$$T_f(l) = q_0 l = Ml$$

$$M_{of}(l) = q_0 l \frac{l}{2} = M \frac{l^2}{2}$$

Ohybová čára a pootočení

Funkce ohybové čáry a pootočení pro obecný bod nosníku

$$v(x) = \frac{M_{of}(x)}{EJ} = \frac{M}{EJ} \frac{x^2}{2}$$

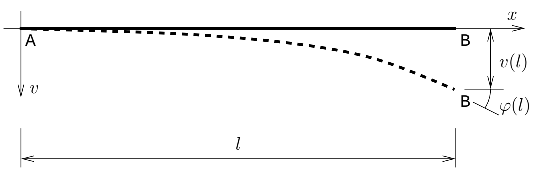
$$\varphi(x) = \frac{T_f(x)}{EJ} = \frac{M}{EJ} x$$

Posunutí a pootočení na konci nosníku v bodě `B`

$$v(l) = \frac{M_{of}(l)}{EJ} = \frac{M}{EJ} \frac{l^2}{2}$$

$$\varphi(l) = \frac{T_f(l)}{EJ} = \frac{M}{EJ} l$$

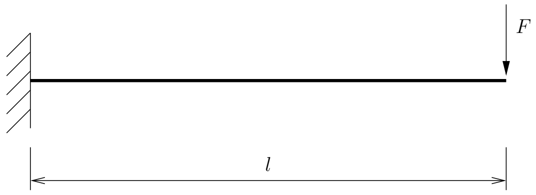
Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



3 Příklad

Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete funkci momentu a ohybové čáry a stanovte posunutí a pootočení na konci nosníku. Vyřeště pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: F, l. Určete: $M_o(x)$, $T_f(x)$, $M_{of}(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, $v(l)$, $\varphi(l)$



Reakce

Podstatné pro řešení úlohy je jen svislá posouvací reakce $T(0)$ a moment $M(0)$ v bodě `A`, kde $x = 0$.

$T(0)$ – síla – $\uparrow$ silová podmínka

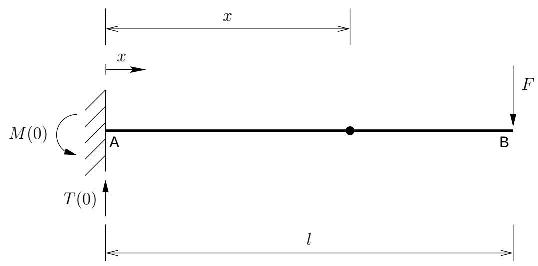
$$T(0) = F$$

$M(0)$ – moment – momentová podmínka k bodu `A`

$$M(0) = Fl$$

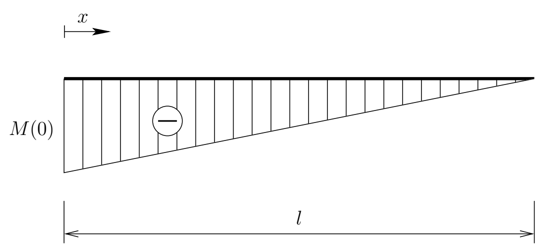
Průběh momentů

Sečteme všechny momenty zleva (kladné směry $\leftarrow \uparrow \circlearrowleft$) k vyšetřovanému bodu ve vzdálenosti x.



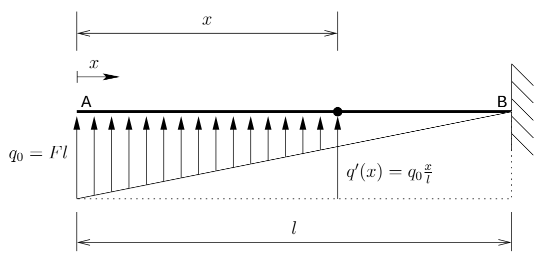
$$M_o(x) = -M(0) + T(0)x = -Fl + Fx = -F(l - x)$$

Výsledný průběh momentu



Fiktivní nosník

Z tabulek určíme fiktivní nosník a vytvoříme na něm spojité trojúhelníkové zatížení odpovídající tvarem a velikostí momentům skutečného nosníku $q_0 = Fl$. Určíme průběh posouvacích sil a momentů na fiktivním nosníku $T_f(x)$ a $M_{of}(x)$ (stejná znaménková konvence jako u T a M tedy $\leftarrow \uparrow \circlearrowleft$). Pozn.: pro sestavení průběhů posouvacích sil a momentů využiji metody skládání obrazců – od obdélníku odečítám trojúhelník.



$$T_f(x) = q_0x - \frac{q'(x)x}{2} = q_0x - q_0\frac{x^2}{2l} = Flx - F\frac{x^2}{2} =$$
$$= F\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$M_{of}(x) = q_0x\frac{x}{2} - q_0\frac{x^2}{2l}\frac{x}{3} = q_0\frac{x^2}{2} - q_0\frac{x^3}{6l} =$$
$$= Fl\frac{x^2}{2} - F\frac{x^3}{6} = F\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Hodnoty posouvací síly a momentu ve vetknutí fiktivního nosníku $T_f(l)$ a $M_{of}(l)$.

$$T_f(l) = F\left(l^2 - \frac{l^2}{2}\right) = F\frac{l^2}{2}$$

$$M_{of}(l) = F\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right) = F\frac{l^3}{3}$$

Ohybová čára a pootočení

Funkce ohybové čáry a pootočení pro obecný bod nosníku

$$v(x) = \frac{M_{of}(x)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

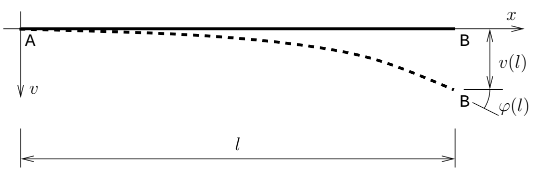
$$\varphi(x) = \frac{T_f(x)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Posunutí a pootočení na konci nosníku v bodě B

$$v(l) = \frac{M_{of}(l)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\frac{l^3}{3}$$

$$\varphi(l) = \frac{T_f(l)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\frac{l^2}{2}$$

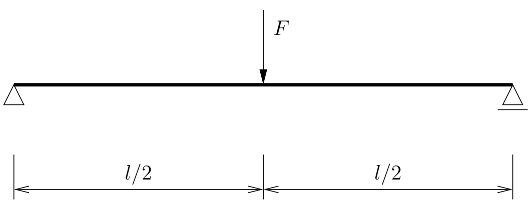
Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



4 Příklad

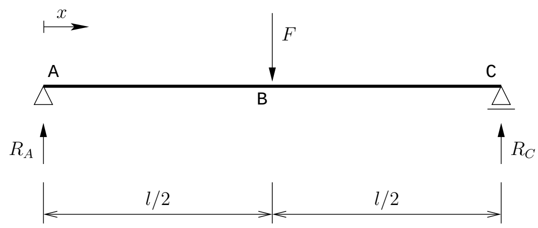
Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete posunutí uprostřed nosníku a pootočení na obou koncích nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: F, l. Určete: $v(l/2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(l)$



Reakce

Stanovíme svislou reakci R_A v bodě A , kde $x = 0$ a svislou reakci R_C v bodě C, kde $x = l$.



R_A – síla – momentová podmínka k bodu C

$$R_A = F/2$$

R_C – síla – momentová podmínka k bodu A

$$R_C = F/2$$

Průběh momentů

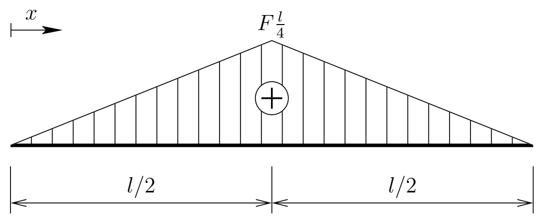
Sečteme všechny momenty zleva (kladné směry ← ↑ ↻) k vyšetřovanému bodu ve vzdálenosti x. Moment v bodě A pro $x = 0$ je $M_A = 0$ a moment v bodě C pro $x = l$ je $M_C = 0$.

$$M_{AB}(x) = R_Ax = F\frac{x}{2}$$

$$M_B(l) = R_A\frac{l}{2} = F\frac{l}{4}$$

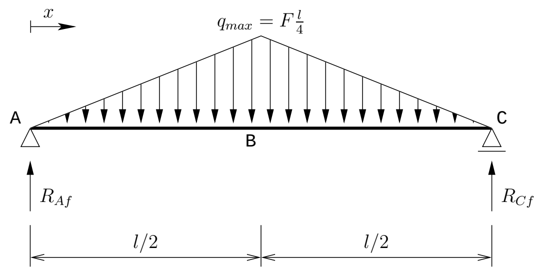
$$M_{BC}(x) = R_Ax - F(x - \frac{l}{2}) = F\frac{x}{2} - F(x - \frac{l}{2}) = \frac{F}{2}(l - x)$$

Výsledný průběh momentu



Fiktivní nosník

Z tabulek určíme fiktivní nosník a vytvoříme na něm dvojté spojité trojúhelníkové zatížení odpovídající tvarem a velikostí momentům skutečného nosníku s maximem uprostřed nosníku $M_B = F\frac{l}{4}$. Pro určení posunutí a pootočení v bodech A, B a C nám stačí určit hodnoty posouvací síly a momentu pro každý z těchto bodů (stejná znaménková konvence jako u T a M tedy ← ↑ ↻).



Reakce na fiktivním nosníku

$$R_{Af} = \frac{1}{2}\frac{l}{2}q_{max} = \frac{1}{2}\frac{l}{2}F\frac{l}{4} = F\frac{l^2}{16} = R_{Cf}$$

Bod A pro $x = 0$

$$T_f(0) = R_{Af} = F\frac{l^2}{16}$$

$$M_{of}(0) = 0$$

Bod B pro $x = l/2$

$$T_f(l/2) = R_{Af} - \frac{1}{2}\frac{l}{2}q_{max} = F\frac{l^2}{16} - F\frac{l^2}{16} = 0$$

$$M_{of}(l/2) = R_{Af}\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\frac{l}{2}q_{max}\frac{1}{3}\frac{l}{2} = F\frac{l^2}{16}\frac{l}{2} - F\frac{l^2}{16}\frac{1}{3}\frac{l}{2} = F\frac{l^3}{48}$$

Bod C pro $x = l$

$$T_f(l) = R_{Af} - \frac{1}{2}lq_{max} = F\frac{l^2}{16} - F\frac{l^2}{8} = -F\frac{l^2}{16}$$

$$M_{of}(l) = 0$$

Posunutí a pootočení

Bod A pro $x = 0$

$$v(0) = \frac{M_{of}(0)}{EJ} = 0$$

$$\varphi(0) = \frac{T_f(0)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\frac{l^2}{16} = \varphi_{max}$$

Bod B pro $x = l/2$

$$v(l/2) = \frac{M_{of}(l/2)}{EJ} = \frac{F}{EJ}\frac{l^3}{48}$$

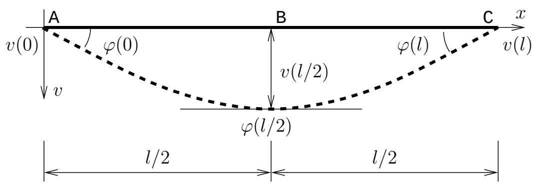
$$\varphi(l/2) = \frac{T_f(l/2)}{EJ} = 0$$

Bod C pro $x = l$

$$v(l) = \frac{M_{of}(l)}{EJ} = 0$$

$$\varphi(l) = \frac{T_f(l)}{EJ} = -\frac{F}{EJ}\frac{l^2}{16} \Longrightarrow |\varphi(l)| = \varphi(0)$$

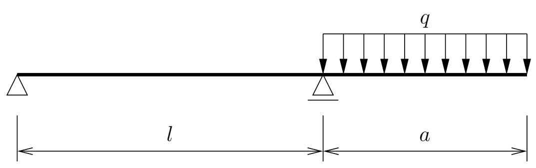
Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



5 Příklad

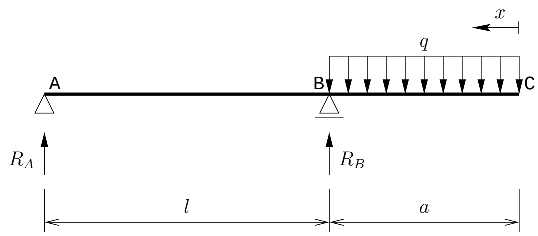
Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete posunutí a pootočení na převislém konci nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: q, l, a. Určete: $v(0)$ a $\varphi(0)$.



Reakce

Stanovíme svislou reakci R_A v bodě A , kde $x = l + a$ a svislou reakci R_B v bodě B, kde $x = a$.



R_A – síla – momentová podmínka k bodu B

$$R_A = -q\frac{a^2}{2l}$$

R_B – síla – momentová podmínka k bodu A

$$R_B = q(a + \frac{a^2}{2l})$$

Průběh momentů

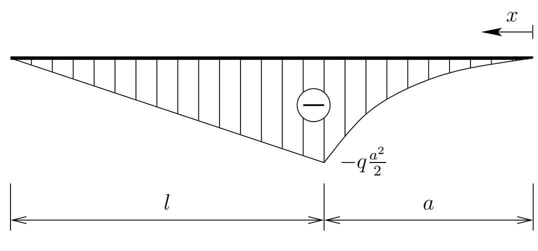
Sečteme všechny momenty zprava (kladné směry $\rightarrow \downarrow \circlearrowleft$) k vyšetřovanému bodu ve vzdálenosti x. Moment v bodě C pro $x = 0$ je $M_C = 0$ a moment v bodě A pro $x = l + a$ je $M_A = 0$.

$$M_{CB}(x) = -qx\frac{x}{2} = -q\frac{x^2}{2}$$

$$M_B(a) = -q\frac{a^2}{2}$$

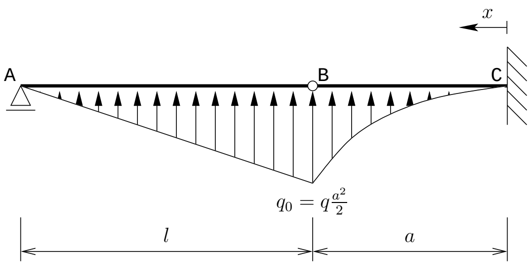
$$\begin{aligned} M_{BA}(x) &= -qa(x - \frac{a}{2}) + R_B(x - a) = \\ &= -qax - q\frac{a^2}{2}(qa + q\frac{a^2}{2l}).(x - a) = \\ &= q(\frac{a^2}{2l}x - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2l}) \end{aligned}$$

Výsledný průběh momentu

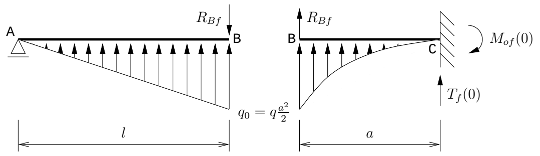


Fiktivní nosník

Z tabulek určíme fiktivní nosník a vytvoříme na něm spojité trojúhelníkové a parabolické zatížení odpovídající tvarem a velikostí momentům skutečného nosníku s maximem nad podporou B $M_B = q\frac{a^2}{2}$. Pro určení posunutí a pootočení v bodu C nám stačí určit hodnoty posouvací síly a momentu pro tento bod, což odpovídá svislé silové reakci $T_f(0)$ a momentu $M_{of}(0)$ ve vetknutí fiktivného nosníku (stejná znaménková konvence jako u T a M tedy $\leftarrow \uparrow \circlearrowleft$).



Složenou soustavu, která je v rovnováze, je nutno rozdělit na dvě části, které jsou také v rovnováze, a dopočítat vazební sílu R_{Bf}.



Z momentové podmínky na levé části kolem bodu `A` dopočítáme vazební sílu R_{Bf}

$$\begin{aligned} R_{Bf}l - \frac{1}{2}q_0 l\frac{2}{3}l &= 0 \\ R_{Bf}l - \frac{1}{2}q\frac{a^2}{2}l\frac{2}{3}l &= 0 \\ R_{Bf} &= q\frac{a^2 l}{6} \end{aligned}$$

Ze svislé silové podmínky na pravé části dopočítáme silovou reakci $T_f(0)$

$$\begin{aligned} T_f(0) - R_{Bf} - \frac{1}{3}q_0 a &= 0 \\ T_f(0) - q\frac{a^2 l}{6} - \frac{1}{3}q\frac{a^2}{2}a &= 0 \\ T_f(0) &= q(\frac{a^2 l}{6} + \frac{a^3}{6}) \end{aligned}$$

Z momentové podmínky kolem bodu `C` na pravé části dopočítáme momentovou reakci $M_{of}(0)$

$$\begin{aligned} M_{of}(0) - R_{Bf}a - \frac{1}{3}q_0 a\frac{3}{4}a &= 0 \\ M_{of}(0) - q\frac{a^2 l}{6}a - \frac{1}{3}q\frac{a^2}{2}a\frac{3}{4}a &= 0 \\ M_{of}(0) &= q(\frac{a^3 l}{6} + \frac{a^4}{8}) \end{aligned}$$

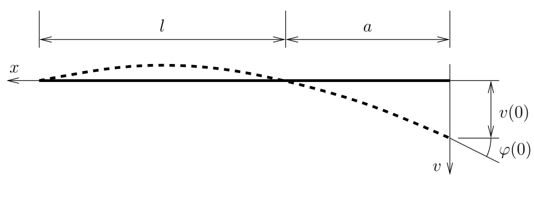
Posunutí a pootočení

Bod `C` pro $x = 0$

$$v(0) = \frac{M_{of}(0)}{EJ} = \frac{q}{EJ}(\frac{a^3 l}{6} + \frac{a^4}{8})$$

$$\varphi(0) = \frac{T_f(0)}{EJ} = \frac{q}{EJ}(\frac{a^2 l}{6} + \frac{a^3}{6})$$

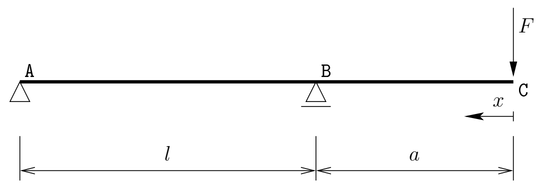
Graficky znázorněné posunutí a pootočení řešeného nosníku



6 Příklad

Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete posunutí a pootočení na převislém konci nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: F, l, a. Určete: $v(0)$ a $\varphi(0)$.



Fiktivní nosník

Vazební síla R_{Bf}

$$R_{Bf} = F\frac{al}{3}$$

Posunutí a pootočení

Bod `C` pro $x = 0$

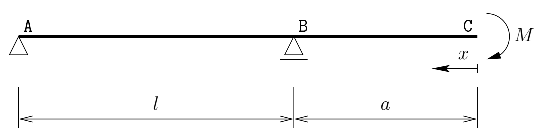
$$v(0) = \frac{M_{of}(0)}{EJ} = \frac{F}{EJ}(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 l}{3})$$

$$\varphi(0) = \frac{T_f(0)}{EJ} = \frac{F}{EJ}(\frac{a^2}{2} + \frac{al}{3})$$

7 Příklad

Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete posunutí a pootočení na převislém konci nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: M, l, a. Určete: $v(0)$ a $\varphi(0)$.



Fiktivní nosník

Vazební síla R_{Bf}

$$R_{Bf} = M\frac{l}{3}$$

Posunutí a pootočení

Bod `C` pro $x = 0$

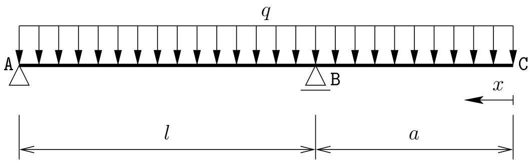
$$v(0) = \frac{M_{of}(0)}{EJ} = \frac{M}{EJ}(\frac{a^2}{2} + \frac{al}{3})$$

$$\varphi(0) = \frac{T_f(0)}{EJ} = \frac{M}{EJ}(a + \frac{l}{3})$$

8 Příklad

Zadání

Vyšetřete nosník zatížený dle obrázku. Určete posunutí a pootočení na převislém konci nosníku. Vyřešte pomocí metody fiktivního nosníku. Znáte: q, l, a. Určete: $v(0)$ a $\varphi(0)$.



Fiktivní nosník

Vazební síla R_{Bf}

$$R_{Bf} = q(\frac{a^2 l}{6} - \frac{l^3}{24})$$

Posunutí a pootočení

Bod C pro $x = 0$

$$v(0) = \frac{M_{of}(0)}{EJ} = \frac{q}{EJ}(\frac{a^4}{8} + \frac{a^3 l}{6} - \frac{al^3}{24})$$

$$\varphi(0) = \frac{T_f(0)}{EJ} = \frac{q}{EJ}(\frac{a^3}{6} + \frac{a^2 l}{6} - \frac{l^3}{24})$$